جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج

الرياضيات

للصف السادس العلمي
الفرع التطبيقي

المؤلفون

الدكتور طارق شعبان رجب الحديثي
الدكتور رحيم يونس كرو
محمد عبد الغفور الجواهري
منعم حسين التميمي
يوسف شريف المعمار
جعفر رضا هاشم الزبيدي

الطبعة السابعة
١٤٣٨هـ / ٢٠١٧م

المشرف العلمي على الطبع : حسين صادق العلاق

المشرف الفـــني على الطبــع : احمد تحسين علي

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج

www.manahj.edu.iq
manahjb@yahoo.com
Info@manahj.edu.iq



manahjb
manahj



مقدمة

لقد ظهرت في الكثير من دول العالم المتقدم مناهج حديثة في الرياضيات، وطرائق جديدة لتناولها كانت سبباً في حركة ديناميكية فعّالة أثرت في العملية التعليمية في المدارس والجامعات، وأحدثت فيها تطويراً جذرياً، وعليه أصبح من الضروري أن يلتحق العراق بهذا الركب وان يسارع في العمل لتطوير مناهج التعليم واساليبه وخاصة في الرياضيات التي تلعب دوراً طليعياً في إرساء دعائم الحضارة والمدنية، فهناك علاقة طردية بين احتياجات التنمية الصناعية والزراعية والمدنية، والتكنولوجيه والاقتصادية بصفة خاصة وبين مناهج الرياضيات في المؤسسات التعليمية بمختلف مستوياتها .

وفي ضوء خطة تطوير المناهج الدراسية عامة ومناهج الرياضيات خاصة تم تأليف هذا الكتاب ضمن مشروع تنويع التعليم لطلبة الصف السادس العلمي/ الفرع التطبيقي الذي هو آخر حلقة من سلسلة الرياضيات قبل الجامعية، اذ تقع مادة هذا الكتاب في ستة فصول، تناول الفصل الاول الاعداد المركبة، والعمليات عليها وايجاد الجذور وخواصها ، وحل معادلات من الدرجة الثانية في مجموعة الاعداد المركبة، والاحداثيات القطبية واخيراً مقياس العدد المركب وسعته وكتابته بدلالتيهما.

اما الفصل الثاني فقد احتوى على القطوع المخروطية متضمنة القطوع المخروطية (المكافيء، الناقص، الزائد) والمعادلة القياسية لكل منها في حالات مختلفة، والاختلاف المركزي لكل قطع مخروطي .

واشتمل الفصل الثالث على المشتقات العليا للدوال القابلة للاشتقاق والمعدّلات الزمنية والقيم العظمى والصغرى المحلية ومبرهنة رول ومبرهنة القيمة المتوسطة والتقريب باستخدامها، والتقعر والتحدب ورسم بيان بعض كثيرات الحدود والحدوديات النسبية، اما اشتقاق الدوال الاسية واللوغارتمية فقد عرضت في الفصل الرابع الذي احتوى على موضوع التكامل وتطبيقاته، اذ تم التطرق الى التجزئة المنتظمة ومجموع ريمان لكن بصورة مبسطة وعن طريق الامثلة بهدف التوصل الى المبرهنة الاساسية للتفاضل والتكامل.

ثم التركيز على ايجاد تكاملات الدوال الجبرية واللوغارتمية والاسية والدائرية وايجاد المساحة بين منحنيين وبين منحني ومحور السينات وحجوم المجسمات الدورانية واحتوى الفصل الخامس على موضوع المعادلات التفاضلية والذي اقتصر على المفاهيم الخاصة بالمعادلات التفاضلية (الرتبة، الدرجة، الحل).

ولم يركز عند حل المعادلات التفاضلية الا على فصل المتغيرات، والمعادلات المتجانسة.

اما الفصل الاخير فقد تضمن تكملة لما درسه الطالب في الصف الخامس العلمي من مادة الهندسة المجسمة والمتعلقة بالزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة ومفاهيم الاسقاط العمودي والمبرهنات المتعلقة بهذه الموضوعات كما اشتمل هذا الفصل على مساحات وحجوم بعض المجسمات .

وقد روعي في هذا الكتاب وجود قدر كاف من التطبيقات الحياتية والفيزيائية والامثلة والمسائل والتمرينات المنوعة ، وتوخينا جهد امكاننا ان تترابط موضوعات هذا الكتاب مع كتب الرياضيات للصفوف التي سبقته ومع ما يدرسه الطلبة في دراستهم اللاحقة فضلاً عن مراعاة الفروق الفردية بين الطلبة.

كما نثمن جهود الخبيرين العلميين اللذين ساهما بانجاز هذا الكتاب وهما :

الدكتور نوري فرحان عذاب   الدكتور علي يوسف عبد الله

آملين ان نكون قد وفقنا في ذلك كله ، ومرحبين بكل نقد بناء من الطلبة واولياء امورهم او مدرسيهم او من ذوي الاختصاص والاهتمام لإثراء الكتاب وتطويره

والله ولي التوفيق

المؤلفون

المحتويات

1

الفصل الاول

Chapter One

Complex Numbers الاعداد المركبة

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الجزء الحقيقي للعدد R (z):z	$R(z) = x = r\cos\theta$
الجزء التخيلي للعدد I (z): z	$I(z) = y = r\sin\theta$
سعة العدد المركب z	$\arg(z) = \theta$
مقياس العدد المركب z	$r = \|\|z\|\| = \mod z$
الطرف الايسر	LHS
الطرف الايمن	RHS
الأعداد الكلية	w
الاعداد الطبيعية	N
الاعداد الصحيحة	Z
الاعداد النسبية	Q
الاعداد الحقيقية	R
الاعداد المركبة	$\mathbb{C}$

[1-1] الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية.

لقد درسنا في الصفوف السابقة حل المعادلة الخطية (Linear Equation)، وعرفنا انه يوجد حل واحد في مجموعة الاعداد الحقيقية لاية معادلة خطية.

وعند دراستنا للمعادلة التربيعية تبين أنه لنوع معين منها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية، ونوع آخر لا يوجد لها حل في هذه المجموعة، مثل المعادلات: $(x^2 + 1 = 0)$ ، $(x^2 + 4x + 5 = 0)$ وكما تعلمت ان المعادلات التربيعية التي يكون مميزها $(b^2 - 4ac)$ عدداً سالباً لا يوجد لها حل في مجموعة الاعداد الحقيقية.

ان ظهور مثل هذه المعادلات في العديد من التطبيقات الفيزياوية والهندسية ادى الى الحاجة الى توسيع مجموعة الاعداد الحقيقية الى مجموعة اوسع منها هي مجموعة الاعداد المركبة والتي سوف تكون موضوع دراستنا في هذا الفصل.

إننا عندما نريد حل المعادلة $(x^2+1=0)$ أو $(x^2=-1)$ لانجد عدداً حقيقياً مربعه يساوي (-1) لذلك نفترض وجود عدد يساوي $\sqrt{-1}$ وهو غير حقيقي ونرمز له بالرمز (i) ويسمى الوحدة التخيلية (Imaginary Unit) وهو ليس من الاعداد التي تقرن مع العد أو القياس.

إن العدد (i) يحقق الخواص الجبرية للاعداد الحقيقية ما عدا خاصية الترتيب، ولهذا نستطيع حساب قوى (i) كما في الأمثلة الآتية:

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 . i = (-1).i = -i$$

$$i^4 = i^2 . i^2 = (-1)(-1) = 1$$

$$i^{27} = i^{26}.i = (i^2)^{13}.i = (-1)^{13}.i = -i$$

$$i^{81} = i^{80}.i = (i^2)^{40}.i = (-1)^{40}.i = 1.i = i$$

$$i^{-7} = (i)^{-8}.i = (i^2)^{-4}.i = (-1)^{-4} . i = i$$

$$i^{-15} = i^{-16}.i = (i^2)^{-8}.i = (-1)^{-8} . i = i$$

وبصورة عامة يكون

$i^{4n+r} = i^r$, $n \in w$, $r = 0, 1, 2, 3$ حيث

whole Numbers $w = \{0,1,2,...\}$ حيث

وهذا يعني انه عند رفع (i) لعدد صحيح موجب فالناتج يكون احد عناصر المجموعة $\{-i, i, -1, 1\}$

حيث نقسم أس (i) على (4) والباقي هو الأس الجديد الى (i).

فمثلاً : $i^{25} = i$ لأن ناتج قسمة 25 على 4 يساوي 6 والباقي 1.

$i^{99} = i^3 = -i$ لأن ناتج قسمة 99 على 4 يساوي 24 والباقي 3 .

مثال -1

اكتب ما يلي في ابسط صورة:

(a) i^{16} (b) i^{58} (c) i^{12n+93} (d) i^{-13}

الحل:

(a) $i^{16} = i^{4(4)+0} = i^0 = 1$

(b) $i^{58} = i^{4(14)+2} = i^2 = -1$

(c) $i^{12n+93} = (i^4)^{3n} . i^{93} = (1)^{3n}\, i^{4(23)+1} = (1)(i) = i$

(d) $i^{-13} = \dfrac{1}{i^{13}} = \dfrac{i^{16}}{i^{13}} = i^3 = -i$

ملاحظة يمكننا كتابة الجذور التربيعية لأي عدد حقيقي سالب بدلالة i فمثلاً:

$\sqrt{-16} = \sqrt{16} \; . \; \sqrt{-1} = 4\,i$

$\sqrt{-25} = \sqrt{25} \; . \; \sqrt{-1} = 5\,i$

$\sqrt{-12} = \sqrt{12} \; . \; \sqrt{-1} = 2\sqrt{3}\,i$

$\sqrt{-15} = \sqrt{15} \; . \; \sqrt{-1} = \sqrt{15}\,i$

وبصورة عامة يكون

$$\sqrt{-a}=\sqrt{a}\ .\ \sqrt{-1}=\sqrt{a}\,i \quad , \forall\ a\geq 0$$

والآن بعد أن تعرفنا على العدد التخيلي ماذا نسمي العدد $(a+bi)$ حيث a عدد حقيقي، b عدد حقيقي، $i=\sqrt{-1}$؟

تعـــريـف [1-1] Definition

يقــال للعــدد $c = a+bi$ حيــث a,b عــددان حقيقيان $i = \sqrt{-1}$ عــددٌ مــركبٌ (**Complex Number**)، يسمى a جزؤه الحقيقي (**Real Part**) ويسمى b جزؤه التخيلي (**Imaginary Part**). ويرمز الى مجموعة الاعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$ ويقال للصيغة $a+bi$ الصيغة العادية أو الجبرية للعدد المركب.

ملاحظة ان اي عدد مركب $c = a + bi$ يمكن جعله مناظراً للزوج المرتب الوحيد (a,b)

اذ أن b,a عددان حقيقيان، وبالعكس فالعدد الحقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a+0i$ أو $(a,0)$. وان العدد i (**Imaginary Unit**) حيث ان: $(0,1) \Leftrightarrow i$ او $i=0+1i$.

يقال للعدد $bi \Leftrightarrow (0\ ,\ b)$ عدد تخيلي بحت (**pure Imaginary Number**) والعدد $a=a+0i \Leftrightarrow (a\ ,0)$ إنه عدد حقيقي بحت (**Pure Real Number**).

فالعدد $-2+3i$ عدد مركب، جزؤه الحقيقي -2 وجزؤه التخيلي 3

والعدد -2 عدد مركب، جزؤه الحقيقي -2 وجزؤه التخيلي 0

اما العدد $-3i$ فهي عدد مركب، جزؤه الحقيقي 0 وجزؤه التخيلي -3

مثال -2-

اكتب الأعداد الآتية على صورة $a+bi$:

a) -5 b) $\sqrt{-100}$ c) $-1-\sqrt{-3}$ d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}$

الحل :

a) $-5=-5+0i$

b) $\sqrt{-100}=\sqrt{100}\sqrt{-1}=10\,i=0+10\,i$

c) $-1-\sqrt{-3}=-1-\sqrt{3}\,i$

d) $\frac{1+\sqrt{-25}}{4}=\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{25}\;\;i}{4}=\frac{1}{4}+\frac{5}{4}i$

بما ان كل عدد حقيقي a يمكن كتابته بالشكل $a+0i$ أو $(a,0)$ اي يمكن كتابته على صورة عدد مركب جزؤه التخيلي صفر فان هذا يبين أن :

ملاحظة

مجموعة الاعداد الحقيقية R هي مجموعة جزئية من مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ اي ان $R \subset \mathbb{C}$.

تعريف [1-2] Definition

اذا كان : $c_1=a_1+b_1i\;,\;c_2=a_2+b_2i$

فإنَّ : $c_1=c_2 \Leftrightarrow a_1=a_2\;,\;b_1=b_2$

اي يتساوى العددان المركبان اذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان وبالعكس.

مثال – 3 –

جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلة في كل مما يأتي .

a) $2x-1+2i = 1+(y+1)i$.

b) $3x+4i = 2+8yi$

c) $(2y+1)-(2x-1)i = -8+3i$

الحل :

a) $\because\ 2x-1+2i = 1+(y+1)i$

$\therefore\ 2x-1 = 1 \Rightarrow 2x = 2$

$\Rightarrow\ x = 1$

$2 = y+1 \Rightarrow y = 2-1$

$\therefore\ y = 1$

b) $3x+4i = 2+8yi$

$\therefore\ 3x = 2\ ,\ 4 = 8y \Rightarrow$

$x = \frac{2}{3}\ ,\ y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

c) $\because\ (2y+1)-(2x-1)i = -8+3i$

$\therefore\ 2y+1 = -8\ ,\ -(2x-1) = 3 \Rightarrow$

$2y = -9\ ,\ -2x = 2 \Rightarrow$

$y = \frac{-9}{2}\ ,\ x = -1$

[1-2] العمليات على مجموعة الاعداد المركبة.

اولاً: عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة :

تعريف [1-3] Definition

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فان

$c_1 + c_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

وكما تعلم أن: $(b_1 + b_2) \in R$ ، $(a_1 + a_2) \in R$ لان مجموعة الاعداد الحقيقية مغلقة تحت عملية الجمع .

$\therefore \quad (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \in \mathbb{C}$

اي ان مجموعة الاعداد المركبة مغلقة تحت عملية الجمع .

مثال -4-

جد مجموع العددين المركبين في كل مما يأتي :

a) $3+4\sqrt{2}i, \; 5-2\sqrt{2}i$

b) $3, \; 2-5i$

c) $1-i, \; 3i$

الحل :

a) $(3+4\sqrt{2}i)+(5-2\sqrt{2}i)=(3+5)+(4\sqrt{2}-2\sqrt{2})i$

$=8+2\sqrt{2}i$

b) $(3)+(2-5i)=(3+0i)+(2-5i)$

$=(3+2)+(0-5)i = 5-5i$

c) $(1-i)+3i=(1-i)+(0+3i)$

$=(1+0)+(-1+3)i = 1+2i$

خواص عملية الجمع على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الجمع على الاعداد المركبة بالخواص الآتية :

$\forall\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

فان :

* الخاصية الابدالية . (Commutativity)

(1) $c_1 + c_2 = c_2 + c_1$

* الخاصية التجميعية. (Associativity)

(2) $c_1 + (c_2 + c_3) = (c_1 + c_2) + c_3$

* النظير الجمعي. (Additive Inverse)

(3)

$\forall c \in \mathbb{C},\ c = a + bi\ \exists\, z \in \mathbb{C} :\ c + z = z + c = 0 \Rightarrow z = -c = -a - bi$

*العنصر المحايد الجمعي. Additive Identity يرمز له بالرمز e ويُعرف

(4) $e = 0 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

مما سبق نستنتج أن $(\mathbb{C}, +)$ هي زمرة ابدالية (Commutative Group)

ملاحظة

ان طرح أي عدد مركب من آخر يساوي حاصل جمع العدد المركب الاول مع النظير الجمعي للعدد المركب الثاني.

مثال- 5-

جد ناتج :

$(7-13i) - (9+4i)$

الحل :

$(7-13i) - (9+4i)$

$= (7-13i) + (-9-4i)$

$= (7-9) + (-13-4)i$

$= -2 - 17i$

مثال -6-

حل المعادلة :

$(2-4i)+x=-5+i$

حيث $x \in \mathbb{C}$

الحل :

$(2-4i)+x=-5+i$

باضافة النظير الجمعي للعدد $(2-4i)$ للطرفين $(2-4i)+(-2+4i)+x=(-5+i)+(-2+4i)$

$\therefore\ x=(-5+i)+(-2+4i)$

$=(-5-2)+(1+4)i$

$x=-7+5i$

ثانياً: عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة :

لايجاد عملية ضرب عددين مركبين نقوم بضربهما بصفتهما مقدارين جبريين ونعوض بدلاً من العدد i^2 (-1) كما يأتي :

اذا كان $c_1=a_1+b_1i$ ، $c_2=a_2+b_2i$ فان

$$c_1 \cdot c_2=(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)$$

$$=a_1a_2++a_1b_2i+a_2b_1i+b_1b_2i^2$$

$$=a_1a_2+a_1b_2i+a_2b_1i-b_1b_2$$

$$=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$$

ملاحظة

اذا كان ، $m \in R$ $c=a+bi$ فان

$mc=ma+mbi$

تعريف [1-4] Definition

ليكن $c_1 = a_1 + b_1 i$, $c_2 = a_2 + b_2 i$ حيث $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ فان :

$$c_1 \cdot c_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$$

وكما تعلم : $(a_1 a_2 - b_1 b_2) \in R$ وان $(a_1 b_2 + a_2 b_1) \in R$ لان

R مغلق تحت عملية الضرب

لذلك فان $c_1 \cdot c_2 \in \mathbb{C}$

أي ان مجموعة الاعداد المركبة مغلقة تحت عملية الضرب.

مثال -7-

جد ناتج كلا مما يأتي :

a) $(2-3i)(3-5i)$

b) $(3+4i)^2$

c) $i(1+i)$

d) $-\frac{5}{2}(4+3i)$

e) $(1+i)^2 + (1-i)^2$

الحل :

a) $(2-3i)(3-5i) = (6-15) + (-10-9)i$

$= -9 - 19i$

او يمكن ايجاد حاصل الضرب بالتوزيع

$(2-3i)(3-5i) = 6 - 10i - 9i + 15i^2 = -9 - 19i$

b) $(3+4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2$

$= 9 + 24i - 16$

$= -7 + 24i$

أو $(3+4i)^2 = (3+4i)(3+4i) = (9-16) + (12+12)i = -7 + 24i$

c) $i(1+i) = i + i^2 = -1 + i$

$$d) -\frac{5}{2}(4+3i) = -10 - \frac{15}{2}i$$

$$e) (1+i)^2 + (1-i)^2 = (1+2i+i^2) + (1-2i+i^2)$$

$$= 2i + (-2i) = 0$$

خواص عملية الضرب على مجموعة الاعداد المركبة

تتمتع عملية الضرب على الاعداد المركبة بالخواص الآتية :

$\forall\, c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$

* الخاصية الابدالية . (Commutativity) $(1)\ c_1 \times c_2 = c_2 \times c_1$
* الخاصية التجميعية . (Associativity) $(2)\ c_1 \times (c_2 \times c_3) = (c_1 \times c_2) \times c_3$
* يتوفر العنصر المحايد الضربي (Multiplicative Identity) وهو $(3)\ 1 = (1+0i)$
* النظير الضربي (Multiplicative Inverse)

$(4)\ \forall c \neq 0+0i\ ,\ \exists\, z \neq 0+0i : c\,z = z\,c = 1 \Rightarrow z = \frac{1}{c}$

اي ان لكل عدد مركب C عدا الصفر يوجد له نظير ضربي $\frac{1}{c}$ (يختلف عن الصفر) ينتمي الى مجموعة الاعداد المركبة .

اي ان : $(\mathbb{C}-(0+0i), \times)$ زمرة ابدالية

اي ان : $(\mathbb{C}, +, \times)$ حقل يسمى حقل الاعداد المركبة

[1-3] مرافــق العــدد المــركب Conjugate Number

تعــريــف [1-5] Definition

مرافق العدد المركب $c = a+bi$ هو العدد المركب $\bar{c} = a-bi$ ، $\forall\ a, b \in R$

فمثلاً : $3+i$ هو مرافق العدد $3-i$ وبالعكس، وكذلك مرافق (i) هو $(-i)$ وبالعكس .

وان $5-4i$ مرافق $5+4i$ وبالعكس، وكذلك مرافق العدد 7 هو 7 .

ملاحظة يتضح من تعريف المرافق أنه يحقق الخواص الآتية:

1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$

2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

3) $\overline{\overline{c}} = c$

4) اذا كان $c = a + bi$ فان $c \times \overline{c} = a^2 + b^2$

5) اذا كان $c \in \mathbb{R}$ فان $\overline{c} = c$

6) $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$, $c_2 \neq 0$

مثال -8- اذا كان $c_2 = 3 - 2i$, $c_1 = 1 + i$ فتحقق من :

(1) $\overline{c_1 \pm c_2} = \overline{c_1} \pm \overline{c_2}$ (2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

الحل :

(1) $\overline{c_1 + c_2} = \overline{(1+i) + (3-2i)}$

$= \overline{(4-i)} = 4 + i$

$\overline{c_1} + \overline{c_2} = \overline{(1+i)} + \overline{(3-2i)}$

$= (1-i) + (3+2i) = 4 + i$

$\therefore \overline{c_1 + c_2} = \overline{c_1} + \overline{c_2}$

تأكد بنفسك ان $\overline{c_1 - c_2} = \overline{c_1} - \overline{c_2}$

(2) $\overline{c_1 \times c_2} = \overline{(1+i)(3-2i)}$

$= \overline{3 - 2i + 3i - 2i^2} = \overline{5 + i} = 5 - i$

$\overline{c_1} \times \overline{c_2} = \overline{(1+i)}\ \overline{(3-2i)} = (1-i)(3+2i)$

$= (3+2) + (2-3)i = 5 - i$

$\therefore \overline{c_1 \times c_2} = \overline{c_1} \times \overline{c_2}$

مثال -9- جد النظير الضربي للعدد $c = 2 - 2i$ وضعه بالصيغة العادية للعدد المركب.

الحل : النظير الضربي للعدد c هو $\frac{1}{c}$

$$\frac{1}{c} = \frac{1}{2-2i}$$

$$= \frac{1}{2-2i} \times \frac{2+2i}{2+2i} = \frac{2+2i}{4+4} = \frac{2+2i}{8}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$$

مثال -10- اذا كان $\frac{3-2i}{i}$, $\frac{x-yi}{1+5i}$ مترافقان فجد قيمة كل من $x, y \in R$.

الحل :

$$\frac{3-2i}{i} = \overline{\left(\frac{x-yi}{1+5i}\right)}$$

$$\frac{3-2i}{i} = \frac{x+yi}{1-5i}$$

$$xi + yi^2 = 3 - 15i - 2i + 10i^2$$

$$xi - y = -7 - 17i$$

$$\therefore x = -17$$

$$y = 7$$

مثال -11- اذا كان $c_1 = 3 - 2i$, $c_2 = 1 + i$ فتحقق من : $\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$

الحل :

$$\overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{3-2i}{1+i} \times \frac{1-i}{1-i}\right)} = \overline{\left(\frac{3-3i-2i+2i^2}{1+1}\right)}$$

$$= \overline{\left(\frac{1-5i}{2}\right)} = \overline{\frac{1}{2} - \frac{5}{2}i} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}} = \frac{\overline{3-2i}}{\overline{1+i}} = \frac{3+2i}{1-i}$$

$$= \frac{3+2i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{3+3i+2i+2i^2}{1+1}$$

$$= \frac{1+5i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

$$\therefore \overline{\left(\frac{c_1}{c_2}\right)} = \frac{\overline{c_1}}{\overline{c_2}}$$

ملاحظة

لاجراء قسمة العدد المركب c_1 على العدد المركب c_2 حيث $c_2 \neq 0$ فاننا نضرب بسط ومقام المقدار $\frac{c_1}{c_2}$ بمرافق المقام فيكون:

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{c_1}{c_2} \times \frac{\overline{c_2}}{\overline{c_2}}$$

مثال -12-

ضع كلاً مما يأتي بالصورة $a+bi$:

a) $\frac{1+i}{1-i}$ b) $\frac{2-i}{3+4i}$ c) $\frac{1+2i}{-2+i}$

الحل :

a) $\frac{1+i}{1-i}=\frac{1+i}{1-i}\times\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+2i+i^2}{1+1}=\frac{2i}{2}=i=0+i$

b) $\frac{2-i}{3+4i}=\frac{2-i}{3+4i}\times\frac{3-4i}{3-4i}=\frac{6-8i-3i+4i^2}{9+16}=\frac{2-11i}{25}=\frac{2}{25}-\frac{11}{25}i$

c) $\frac{1+2i}{-2+i}=\frac{1+2i}{-2+i}\times\frac{-2-i}{-2-i}=\frac{-2-i-4i-2i^2}{4+1}=\frac{-5i}{5}=-i=0-i$

ملاحظة

يمكن تحليل x^2+y^2 الى حاصل ضرب عددين مركبين كل منهما من الصورة $a+bi$ وذلك :

$x^2+y^2=x^2-y^2i^2=(x-yi)(x+yi)$

مثال -13-

حلل كلاً من العددين 10 ، 53 الى حاصل ضرب عاملين من صورة $a+bi$ حيث b,a عددين نسبيين .

الحل :

- $10=9+1$ او $10=1+9$

$=9-i^2$ $=1-9i^2$

$=(3-i)(3+i)$ $=(1-3i)(1+3i)$

- $53=49+4$ او $53=4+49$

$=49-4i^2$ $=4-49i^2$

$=(7-2i)(7+2i)$ $=(2-7i)(2+7i)$

تمارين (1 - 1)

1 . ضع كلاً مما يأتي بالصيغة العادية للعدد المركب :

i^5 , i^6 , i^{124} , i^{999} , i^{4n+1} $\forall n \in w$, $(2+3i)^2 + (12+2i)$

$(10+3i)(0+6i)$, $(1+i)^4 - (1-i)^4$, $\frac{12+i}{i}$, $\frac{3+4i}{3-4i}$

$\frac{i}{2+3i}$, $\left(\frac{3+i}{1+i}\right)^3$, $\frac{2+3i}{1-i} \times \frac{1+4i}{4+i}$, $(1+i)^3 + (1-i)^3$

2 . جد قيمة كل من x , y الحقيقيتين اللتين تحققان المعادلات الآتية :

a) $y+5i=(2x+i)(x+2i)$

b) $8i=(x+2i)(y+2i)+1$

c) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)+(x+yi)=(1+2i)^2$

d) $\frac{2-i}{1+i}x+\frac{3-i}{2+i}y=\frac{1}{i}$

3 . اثبت ان :

a) $\frac{1}{(2-i)^2}-\frac{1}{(2+i)^2}=\frac{8}{25}i$

b) $\frac{(1-i)^2}{1+i}+\frac{(1+i)^2}{1-i}=-2$

c) $(1-i)(1-i^2)(1-i^3)=4$

4 . حلل كلاً من الاعداد 85 ، 41 ، 125، 29 الى حاصل ضرب عاملين من الصورة a+ bi حيث b, a عددان نسبيان .

5– جد قيمة x , y الحقيقيتين اذا علمت ان $\frac{6}{x+yi}$, $\frac{3+i}{2-i}$ مترافقان .

[1-4] الجذور التربيعية للعدد المركب .

لقد تعلمت أنه اذا كان **a** عدداً حقيقياً موجباً فانه يوجد عددان حقيقيان هما $\pm\sqrt{a}$ يحقق كل منهما المعادلة $x^2 = a$ ويسمى $\pm\sqrt{a}$ الجذرين التربيعيين للعدد **a** . أما اذا كان $a = 0$ فان له جذر واحد هو **0** .
والآن سنتناول دراسة الجذور التربيعية للعدد المركب .

مثال -14- جد الجذور التربيعية للعدد $c = 8 + 6i$.

الحل : نفرض ان الجذر التربيعي للعدد **c** هو $x + yi$

$$\therefore (x+yi)^2 = 8+6i \Rightarrow$$

$$x^2 + 2xyi + i^2y^2 = 8+6i \Rightarrow$$

$$(x^2 - y^2) + 2xyi = 8+6i \Rightarrow$$

من تعريف تساوي عددين مركبين

$$\left.\begin{aligned} x^2 - y^2 &= 8 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 2xy = 6 \Rightarrow y &= \frac{3}{x} \ldots\ldots.(2) \end{aligned}\right\}$$

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

$$x^2 - \left(\frac{3}{x}\right)^2 = 8$$

بضرب الطرفين في $x^2 \neq 0$ ينتج :

$$x^2 - \frac{9}{x^2} = 8 \Rightarrow$$

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0 \Rightarrow$$

$$(x^2 - 9)(x^2 + 1) = 0 \Rightarrow$$

$x = \pm 3$ او $x^2 = -1$

$x^2 = -1$ (تهمل لان $x \in R$)

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x نحصل على :

$$y = \frac{3}{\pm 3}$$

$$\therefore y = \pm 1$$

x	3	−3
y	1	−1

$\therefore\ c_1 = 3 + i$ و $c_2 = -3 - i$

أي أن جذري العدد **c** هما $3 + i$, $-3 - i$

مثال -15-

جد الجذور التربيعية للاعداد : -25 ، -17 ، $-i$ ، $8i$

الحل :

a) نفرض ان : $c^2 = -25$

$c = \pm\sqrt{-25} = \pm\sqrt{25}i = \pm 5i$

b) نفرض ان : $c^2 = -17$

$c = \pm\sqrt{-17}$

$\Rightarrow c = \pm\sqrt{17}\, i$

c) نفرض ان $(x+yi)$ هو الجذر التربيعي للعدد $-i$

$\therefore (x+yi)^2 = -i \Rightarrow x^2 + 2xyi + y^2 i^2 = 0 - i$

$x^2 - y^2 = 0 ....(1)$

$2xy = -1$

$\therefore y = \dfrac{-1}{2x} ....(2)$

وبالتعويض من المعادلة (2) بالمعادلة (1) ينتج :

$x^2 - \dfrac{1}{4x^2} = 0 \Rightarrow$

بضرب الطرفين في $4x^2 \neq 0$ ينتج :

$4x^4 - 1 = 0 \Rightarrow$

$(2x^2 - 1)(2x^2 + 1) = 0$

اما $x^2 = -\dfrac{1}{2}$ (يهمل لان $x \in R$)

او $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

وبالتعويض في (2) عن قيمة x نجد :

$\therefore y = -\left(\dfrac{1}{\pm(2)\dfrac{1}{\sqrt{2}}}\right)$

$= \mp \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

x	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$
y	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

∴ جذرا العدد $-\mathbf{i}$ التربيعيان هما $\pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}\right)$

d) نفرض ان $x+y\mathbf{i}$ هو الجذر التربيعي للعدد $8\mathbf{i}$

$\therefore (x+y\mathbf{i})^2 = 8\mathbf{i} \Rightarrow$

$x^2+2xy\mathbf{i}-y^2 = 0+8\mathbf{i}$

$x^2-y^2=0$.......................(1)

$2xy=8 \Rightarrow y=\frac{4}{x}$.............(2)

وبالتعويض من المعادلة (2) في المعادلة (1) ينتج :

$x^2-\frac{16}{x^2}=0$

وبضرب الطرفين في $x^2 \neq 0$ ينتج :

$x^4-16=0 \Rightarrow$

$(x^2-4)(x^2+4)=0 \Rightarrow$

اما $x^2=-4$ (يهمل لان $x \in \mathbf{R}$)

او $x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$

وبالتعويض في المعادلة (2) عن قيمة x ينتج :

$y=\frac{4}{\pm 2}=\pm 2$

x	2	−2
y	2	−2

∴ جذرا العدد $8\mathbf{i}$ التربيعيان هما $\pm(2+2\mathbf{i})$

[1-5] حل المعادلة التربيعية في ($\mathbb{C}$) .

تعلمت من المرحلة المتوسطة ان للمعادلة $ax^2+bx+c=0$ حيث $a \neq 0$ وان $a, b, c \in R$ حلين يمكن ايجادهما بالدستور : $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

وعرفت أنه اذا كان المقدار المميز b^2-4ac سالباً فانه لا يوجد للمعادلة حلول حقيقية ولكن يوجد لها حلان في مجموعة الاعداد المركبة .

مثال -16- حل المعادلة $x^2+4x+5=0$ في مجموعة الاعداد المركبة.

الحل : حسب القانون (الدستور) :

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{16-(4)(1)(5)}}{2(1)}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{16-20}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm\sqrt{-4}}{2}$$

$$=\frac{-4\pm2\mathbf{i}}{2} \qquad =-2\pm\mathbf{i}$$

اذاً مجموعة حل المعادلة هي : $\{-2-\mathbf{i}\ ,\ -2+\mathbf{i}\}$

ملاحظة

من الدستور نعلم ان جذري المعادلة التربيعية $ax^2+bx+c=0$ التي معاملاتها حقيقية هما :

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \qquad x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

ومجموع الجذرين هو : $x_1+x_2=\dfrac{-b}{a}$ وحاصل ضرب الجذرين هو : $x_1\ .\ x_2=\dfrac{c}{a}$

ويمكن الافادة من هذه الخواص كما يأتي :

اولاً : اذا كان $x+yi$ $(y\neq 0)$ احد جذري المعادلة $ax^2+bx+c=0 , a\neq 0$, $a,b,c\in R$

فان $x-yi$ هو الجذر الآخر لها .

ثانياً : بقسمة طرفي المعادلة $ax^2+bx+c=0$ على $a\neq 0$ نحصل على

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$ والتي هي عبارة عن :

$x^2 -$ (مجموع الجذرين) x + (حاصل ضرب الجذرين) $= 0$

مثال -17- جد المعادلة التربيعية التي جذراها $\pm(2+2i)$.

الحل :

مجموع الجذرين هو : $(2+2i)(-2-2i) = (2-2)+(2-2)i=0$

حاصل ضرب الجذرين هو :

$$(2+2i)(-2-2i) = -(2+2i)^2$$
$$= -(4+8i+4i^2)$$
$$= -8i$$

∴ المعادلة التربيعية هي :

$$x^2-0x+(-8i)=0 \Rightarrow$$
$$x^2-8i=0 \Rightarrow x^2=8i$$

مثال -18- كوّن المعادلة التربيعية التي معاملاتها حقيقية وأحد جذريها $3-4i$.

الحل :

بما أن معاملات المعادلة حقيقية وأحد جذريها $3-4i$

∴ الجذر الاخر هو المرافق له وهو $3+4i$

مجموع الجذرين $= 6$ وحاصل ضربهما $= 25$

∴ المعادلة هي :

$$x^2-6x+25=0$$

تمارين (2 - 1)

1 . حل المعادلات التربيعية الآتية وبين اي منها يكون جذراها مترافقين؟

a) $z^2 = -12$

b) $z^2 - 3z + 3 + i = 0$

c) $2z^2 - 5z + 13 = 0$

d) $z^2 + 2z + i(2 - i) = 0$

e) $4z^2 + 25 = 0$

f) $z^2 - 2z\,i + 3 = 0$

2 . كون المعادلة التربيعية التي جذراها M,L حيث :

a) $M = 1 + 2i$, $L = 1 - i$

b) $M = \dfrac{3 - i}{1 + i}$, $L = (3 - 2i)^2$

3 . جد الجذور التربيعية للاعداد المركبة الاتية :

a) $-6i$

b) $7 + 24i$

c) $\dfrac{4}{1 - \sqrt{3}\,i}$

4 . ما المعادلة التربيعية ذات المعاملات الحقيقية وأحد جذريها هو :

a) i

b) $5 - i$

c) $\dfrac{\sqrt{2} + 3i}{4}$

5– اذا كان $3 + i$ هو احد جذري المعادلة $x^2 - ax + (5 + 5i) = 0$ فما قيمة $a \in \mathbb{C}$ ؟ وما هو الجذر الاخر؟

[1-6] الجذور التكعيبية للواحد الصحيح.

ليكن z احد الجذور التكعيبية للواحد الصحيح :

فان $z^3=1$ ومنها :

$$z^3-1=0 \Rightarrow$$
$$(z-1)(z^2+z+1)=0 \Rightarrow$$

أما $z=1$ او $z^2+z+1=0$

ولحل المعادلة $z^2+z+1=0$ نستخدم الدستور :

$$z=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{1-(4)(1)(1)}}{(2)(1)}$$
$$=\frac{-1\pm\sqrt{-3}}{2}$$
$$=\frac{-1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$$

اي ان الجذور التكعيبية للواحد الصحيح الموجب هي :

$$1\ ,\quad -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}\ ,\quad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{i}$$

ان مربع أي من الجذرين التخيليين يساوي الجذر التخيلي الاخر وهما مترافقان (تحقق من ذلك)

فاذا رمزنا لاحد الجذرين التخيليين بالرمز ω "ويقرأ أوميكا **"Omega** فان الجذر الآخر هو ω^2 .

ولذلك يمكن كتابة الجذور التكعيبية للواحد الصحيح على الصورة :

$$\mathbf{1},\ \omega\ ,\ \omega^2$$

وهذه الجذور تحقق الخواص الآتية:

1) $1 + \omega + \omega^2 = 0$

2) $\omega^3 = 1$

ومن الخاصية الاولى نحصل على الاتي:

1) $\omega + \omega^2 = -1$ (2) $1 + \omega = -\omega^2$ (3) $1 + \omega^2 = -\omega$

4) $\omega = -1 - \omega^2$ (5) $\omega^2 = -1 - \omega$ (6) $1 = -\omega - \omega^2$

ومن الخاصية الثانية يمكن التوصل الى النتائج الاتية:

$$\omega^4 = \omega^3 . \omega = 1 . \omega = \omega$$

$$\omega^{-4} = \frac{1}{\omega^4} = \frac{1}{\omega^3 . \omega} = \frac{1}{\omega} = \frac{\omega^3}{\omega} = \omega^2$$

$$\omega^5 = \omega^3 . \omega^2 = 1 . \omega^2 = \omega^2$$

$$\omega^{-5} = \frac{1}{\omega^5} = \frac{1}{\omega^3 . \omega^2} = \frac{1}{1 . \omega^2} = \frac{\omega^3}{\omega^2} = \omega$$

$$\omega^6 = (\omega^3)^2 = (1)^2 = 1$$

$$\omega^{-6} = \frac{1}{\omega^6} = \frac{1}{1} = 1$$

وبالاستمرار على هذا النحو فان قوى (ω) لاعداد صحيحة تأخذ احدى القيم :

$1, \omega , \omega^2$

وتتكرر هذه القيم كلما زادت الاسس على التوالي بمقدار (3) .

بمعنى أن :

$$\omega^{3n+r} = \omega^r$$

$r = 0, 1, 2$, حيث n عدد صحيح

مثال -19-

جد ناتج : ω^{-58} ، ω^{25} ، ω^{33}

الحل :

$$\omega^{33} = \omega^{3(11)+0} = \omega^{0} = 1$$

$$\omega^{25} = \omega^{3(8)+1} = \omega^{1} = \omega$$

$$\omega^{-58} = \omega^{3(-20)+2} = 1 \,.\, \omega^{2} = \omega^{2}$$

بمعنى أن :

باقي قسمة أ س (ω) على (3) هو الاس الجديد الى ω

مثال -20-

اثبت ان :

a) $\omega^{7} + \omega^{5} + 1 = 0$

b) $(5 + 3\omega + 3\omega^{2})^{2} = -4(2 + \omega + 2\omega^{2})^{3} = 4$

الحل :

a) $LHS = \omega^{7} + \omega^{5} + 1 = \omega^{6} \,.\, \omega + \omega^{3} \,.\, \omega^{2} + 1$

$= \omega + \omega^{2} + 1 = 0 = RHS$ (حسب الخاصية الاولى)

b) المقدار الاول $= (5 + 3\omega + 3\omega^{2})^{2} = [5 + 3(\omega + \omega^{2})]^{2}$

$= [5 - 3]^{2} = (2)^{2} = 4$

كذلك

المقدار الثاني $= -4(2 + \omega + 2\omega^{2})^{3}$

$= -4[2(1 + \omega^{2}) + \omega]^{3}$

$= -4[-2\omega + \omega]^{3} = -4\ [-\omega]^{3}$

$= -4(-1) = 4$

$\therefore (5 + 3\omega + 3\omega^{2})^{2} = -4(2 + \omega + 2\omega^{2})^{3} = 4$

مثال -21- كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها

a) $1-i\omega^2 \ , \ 1-i\omega$

b) $\dfrac{2}{1-\omega} \ , \ \dfrac{2}{1-\omega^2}$

الحل :

a)

مجموع الجذرين

$$(1-i\omega^2) + (1-i\omega)$$
$$= 2-i(\omega^2+\omega)$$
$$= 2+i$$

حاصل ضرب الجذرين

$$(1-i\omega^2)(1-i\omega)$$
$$= 1-i\omega-i\omega^2+i^2\omega^3$$
$$= 1-i(\omega+\omega^2)+(-1)(1)$$
$$= i$$

∴ المعادلة هي : $x^2-(2+i)x+i=0$

b)

مجموع الجذرين

$$\frac{2}{1-\omega} + \frac{2}{1-\omega^2}$$
$$= \frac{2-2\omega+2-2\omega^2}{1-\omega^2-\omega+\omega^3}$$
$$= \frac{4-2(\omega+\omega^2)}{2-(\omega+\omega^2)}$$
$$= \frac{6}{3} = 2$$

حاصل ضرب الجذرين

$$\frac{2}{1-\omega} \cdot \frac{2}{1-\omega^2}$$
$$= \frac{4}{1-\omega^2-\omega+\omega^3}$$
$$= \frac{4}{3}$$

∴ المعادلة هي : $x^2-2x+\frac{4}{3}=0$

تمارين (1 - 3)

1 . اكتب المقادير الاتية في ابسط صورة:

a) ω^{64} b) ω^{-325} c) $\frac{1}{(1+\omega^{-32})^{12}}$ d) $(1+\omega^2)^{-4}$ e) ω^{9n+5} , n $\in$ w حيث

2 . كوّن المعادلة التربيعية التي جذراها:

a) $1+\omega^2 \ , \ 1+\omega$

b) $\frac{\omega}{2-\omega^2} \ , \ \frac{\omega^2}{2-\omega}$

c) $\frac{3i}{\omega^2} \ , \ \frac{-3\omega^2}{i}$

3 . اذا كان : $z^2+z+1=0$ فجد قيمة : $\frac{1+3z^{10}+3z^{11}}{1-3z^7-3z^8}$

4 . اثبت ان :

a) $\left(\frac{1}{2+\omega}-\frac{1}{2+\omega^2}\right)^2=-\frac{1}{3}$

b) $\frac{\omega^{14}+\omega^7-1}{\omega^{10}+\omega^5-2}=\frac{2}{3}$

c) $\left(1-\frac{2}{\omega^2}+\omega^2\right)\left(1+\omega-\frac{5}{\omega}\right)=18$

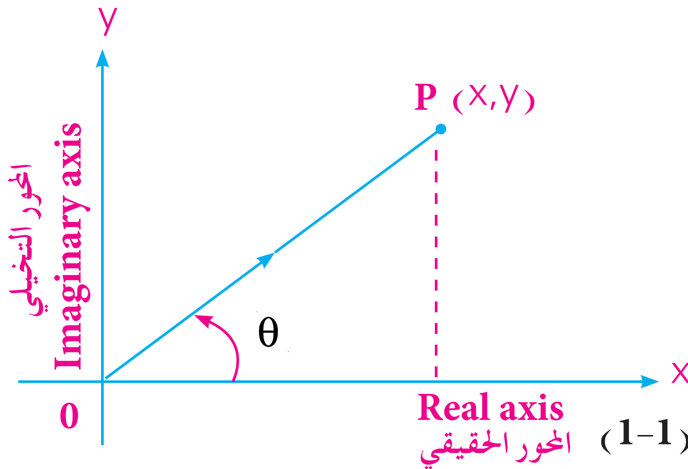
d) $(1+\omega^2)^3+(1+\omega)^3=-2$

[1-7] التمثيل الهندسي للاعداد المركبة.

Geometric Representation of Complex Numbers.

اذا كان E^2 (او R^2) يمثل المستوي الاقليدي المتعامد المحورين. فانه باقران كل عدد مركب $x+yi$ (حيث $x,y \in R$) بالنقطة (x,y) في E^2 نحصل على تطبيق تقابل من E الى R^2 . وفي هذا المستوي سنمثل هندسياً بعض العمليات الجبرية البسيطة في الجمع والطرح في E والتي تقابل هندسياً العمليات في E^2 (او R^2).

سوف نتناول في هذا البند والبنود اللاحقة تمثيل بعض العمليات على الاعداد المركبة هندسياً والتي سنطلق على الاشكال التي تمثلها اشكال ارجاند نسبة الى العالم (J. R . Argand, 1768 – 1822) وسمي المستوي باسم العالم الالماني الشهير غاوس، بمستوي غاوس (C. F. Gauss 1777–1855) أو بشكل مبسط المستوي المركب (Complex Plane)



الشكل (1-1)

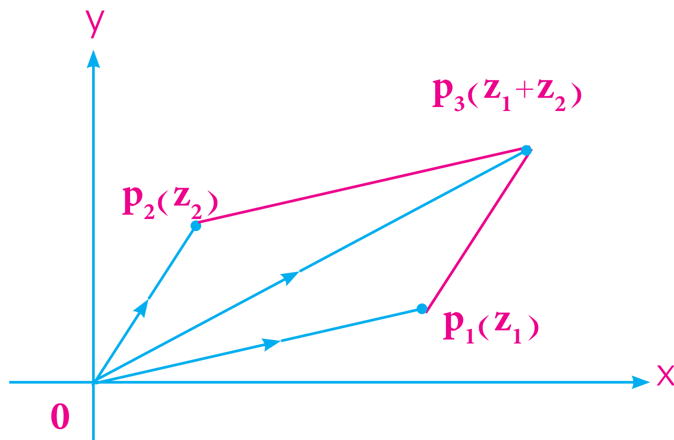
اذ يسمى المحور السيني (x–axis) بالمحور الحقيقي حيث يمثل عليه الجزء الحقيقي للعدد المركب اما المحور الصادي (y – axis) فيطلق عليه اسم المحور التخيلي والذي يمثل عليه الجزء التخيلي للعدد المركب. وبالتالي فان العدد المركب $x + yi$ يُمثل هندسياً بالنقطة (x,y) لاحظ الشكل (1-1)

لو كان $z_1 = x_1 + y_1 i$, $z_2 = x_2 + y_2 i$ عددان مركبان ممثلان بالنقطتين $p_1(x_1, y_1)$, $p_2(x_2 , y_2)$ فان :

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i$$

ويمكن تمثيل $z_1 + z_2$ بالنقطة $p_3(x_1 + x_2 , y_1 + y_2)$ مستخدمين المعلومات المتعلقة بالمتجهات.

كما في الشكل (1- 2) :



الشكل (1-2)

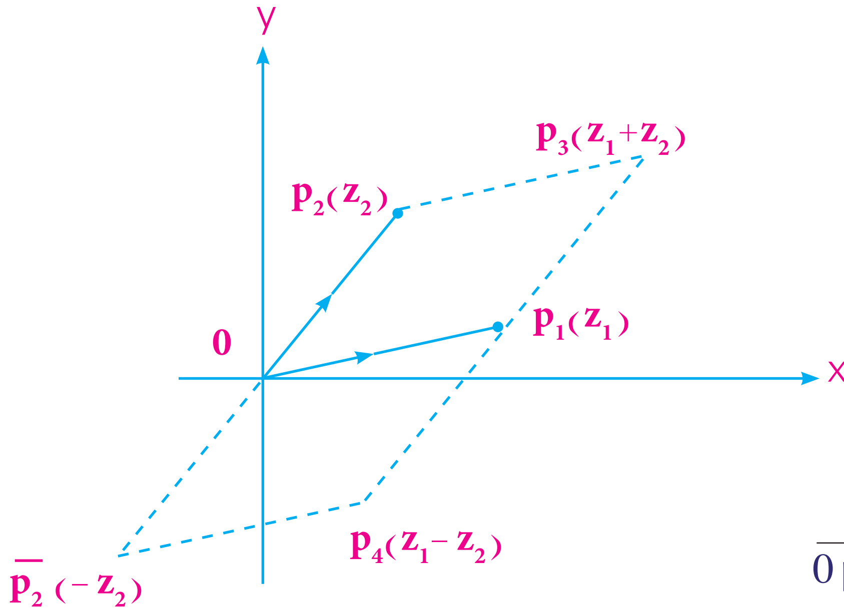
اي ان $\overrightarrow{0p_1} + \overrightarrow{0p_2} = \overrightarrow{0p_3}$

ان العدد المركب $x + yi$ يمكن تمثيله بالمتجه $\overrightarrow{0p}$ وعليه يكون جمع عددين مركبين هو جمع متجهين.

اذا اعتبرنا $\overline{p_2}$ يمثل العدد المركب $-z_2$ فإن $\overline{p_2}$ هي ناتجة من دوران $\overrightarrow{0p_2}$ حول 0 نصف دورة ، وعليه فإن :

$$z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$$

والذي يقترن بالنقطة p_4 حيث $0p_1\, p_4\, \overline{p_2}$ يشابه متوازي الاضلاع $0p_1\, p_3\, p_2$ كما في الشكل (3-1).



الشكل (3-1)

أي أن $\overrightarrow{0p_4} = \overrightarrow{p_2p_1} = \overrightarrow{0p_1} - \overrightarrow{0p_2}$

ملاحظة

(1) ليكن k عدد حقيقي لا يساوي الصفر . z عدد مركب فان النقطة التي تمثل kz يمكن الحصول عليها بواسطة التكبير الذي مركزه 0 ومعامله الثابت k.

(2) لكل عدد مركب z فان النقطة iz يمكن الحصول عليها من دوران ربع دورة عكس عقارب الساعة.

مثال -22- مثّل العمليات الاتية هندسياً في شكل ارجاند :

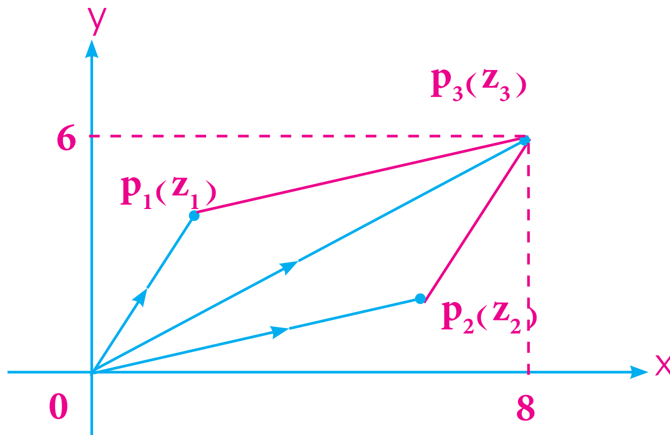
a) $(3+4i)+(5+2i)$ b) $(6-2i)-(2-5i)$

الحل :

a) $(3+4i)+(5+2i)=8+6i$

$z_1=3+4i \Rightarrow p_1(z_1)=p_1(3,4)$

$z_2=5+2i \Rightarrow p_2(z_2)=p_2(5,2)$



لاحظ : $\overrightarrow{0p_1}+\overrightarrow{0p_2}=\overrightarrow{0p_3}$

وهو مشابه الى جمع المتجهات .

ويكـــون $0p_1p_3p_2$ متوازي اضلاع قـطره هـو $\overrightarrow{op_3}$

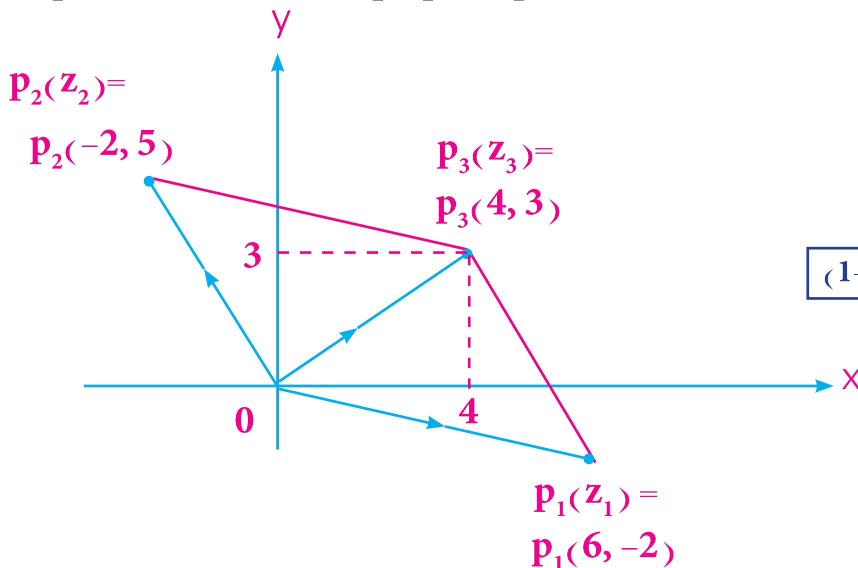
الشكل (1-4)

$z_1+z_2=z_3=8+6i \Rightarrow p_3(z_3)=p_3(8,6)$

b) $(6-2i)-(2-5i)=(6-2i)+(-2+5i)=4+3i$

$z_1=6-2i \Rightarrow p_1(z_1)=p_1(6,-2)$

$z_2=-2+5i \Rightarrow p_2(z_2)=p_2(-2,5)$



الشكل (1-5)

$z_3=4+3i \Rightarrow p_3(z_3)=p_3(4,3)$

تمارين (4 - 1)

1. اكتب النظير الجمعي لكل من الاعداد الآتية ثم مثّل هذه الاعداد ونظائرها الجمعية على شكل ارجاند.

$z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + 3i$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = i$

2. اكتب العدد المرافق لكل من الأعداد الاتية ثم مثّل الاعداد ومرافقاتها على شكل ارجاند.

$z_1 = 5 + 3i$, $z_2 = -3 + 2i$, $z_3 = 1 - i$, $z_4 = -2i$

3. اذا كان $z = 4 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$z , \bar{z} , -z$

4. اذا كان $z_1 = 4 - 2i$, $z_2 = 1 + 2i$ فوضح على شكل ارجاند كلاً من :

$-3z_2$, $2z_1$, $z_1 - z_2$, $z_1 + z_2$

[1-8] الصيغة القطبية Polar Form للعدد المركب.

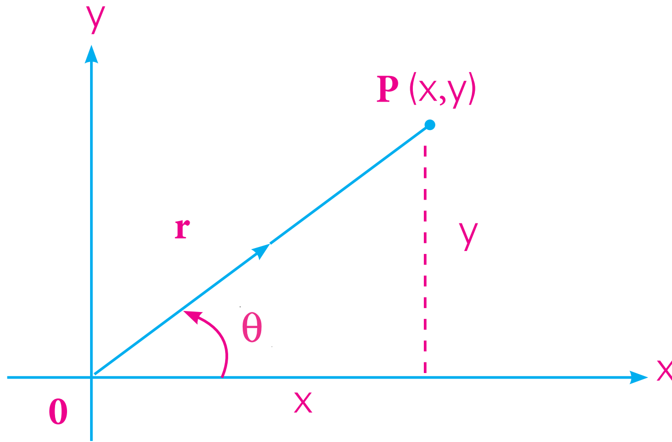
في البنود السابقة درسنا العدد المركب بصيغته الجبرية $z=x+yi$ والديكارتية $z=(x,y)$ وفي هذا البند سندرس صيغة اخرى للعدد المركب تدعى بالصيغة القطبية . وتحويل احدهما الى الاخرى .

فلو كان لدينا العدد المركب $z=x+yi$ ومثّلناه بالنقطة $p(x,y)$ كما في الشكل (1-6) فان :

(r,θ) هما الاحداثيان القطبيان للنقطة p حيث 0 يمثل القطب و $\overrightarrow{ox}$ يمثل الضلع الابتدائي، وهذا يعني أن :

$r=\|\overrightarrow{op}\|$ وان $\theta=m(xop)$

ويكون قياس θ من $\overrightarrow{ox}$ الى $\overrightarrow{op}$ بأتجاه عكس عقارب الساعة اذا كان القياس موجباً، ومع اتجاه عقارب الساعة اذا كان القياس سالباً ويكون بالقياس الدائري وعليه فأن :



الشكل (1-6)

$$R(z)=x=r\cos\theta \quad ....(1)$$

$$I(z)=y=r\sin\theta \quad ....(2)$$

حيث $R(z)$ يرمز للجزء الحقيقي للعدد المركب z بينما $I(z)$ يرمز للجزء التخيلي للعدد المركب z

r يسمى مقياس العدد المركب z (**Modulus of Complex Number**)

وهو عدد حقيقي غير سالب ويقرأ "mod z" او مقياس z ويرمز له $\|z\|$ حيث $r=\|z\|=\sqrt{x^2+y^2}$

ومن العلاقتين (1) و (2) نحصل على :

$$\cos\theta=\frac{x}{r}=\frac{x}{\|z\|}$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}=\frac{y}{\|z\|}$$

اما θ فقياسها يسمى سعة العدد المركب (**Argument of Complex Number**)

واختصاراً تكتب بالشكل $\theta=\arg(z)$

ملاحظة

يمكن ان تاخذ θ عدداً غير منته من القيم التي تختلف كل منها عن الاخرى بعدد صحيح من الدورات.

فاذا كانت θ سعة عدد مركب فان كلاً من الاعداد : $\theta + 2n\pi$ حيث **n** عدد صحيح يكون ايضاً سعة لنفس العدد المركب.

اما اذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ الدالة على سعة العدد المركب فيقال لها القيمة الاساسية لسعة العدد المركب (**principle Value**).

مثال -23-

اذا كان $z = 1 + \sqrt{3}\, i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$= \sqrt{1+3} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{1}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

نستنتج ان θ في الربع الاول

$$\therefore \arg(z) = \frac{\pi}{3}$$

مثال -24-

اذا كان $z = -1 - i$ فجد المقياس والقيمة الاساسية لسعة z .

الحل :

$$\text{mod } z = \|z\| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\theta = \frac{y}{\|z\|} = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

نستنتج ان θ في الربع الثالث

$$\therefore \arg(z) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

ملاحظة

1)ان سعة العدد المركب $z = 0$ غير معرفة وذلك لان المتجه الصفري ليس له اتجاه.

2) ممكن الافادة من المقياس والقيمة الاساسية لسعة العدد المركب بكتابة العدد المركب $z = x+yi$ بصورة اخرى تسمى الصيغة القطبية Polar From وكما يأتي :

$\because \quad x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$

$\therefore \quad z = r\cos\theta + \mathbf{i} r\sin\theta = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$

او $z = \|z\|(\cos(\arg z) + \mathbf{i}\sin(\arg z))$

حيث $r = \text{mod}\, z = \|z\|$ ، $\theta = \arg(z)$ هي سعة العدد المركب z

مثال -25- عبر عن كل من الاعداد الآتية بالصيغة القطبية :

a) $-2+2\mathbf{i}$ b) $2\sqrt{3}-2\mathbf{i}$

الحل :

a) $z = -2+2\mathbf{i}$

$\text{mod}\ z = \|z\| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\cos\theta = \frac{-2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\theta = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

θ تقع في الربع الثاني

$\therefore\ \arg(z) = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$

الصيغة القطبية للعدد المركب Z هي :

$z = r(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)$

$z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{4})$

b) $z = 2\sqrt{3} - 2\,\mathbf{i}$

$$\text{mod } z = \sqrt{12+4} = \sqrt{16} = 4$$

$$\cos\ \theta = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin\theta = \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2}$$

θ تقع في الربع الرابع

$$\therefore\ \mathbf{arg}\,(z) = 2\pi - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

$\therefore$ الصيغة القطبية للعدد المركب Z هي : $z = \mathbf{4}\ (\cos\ \frac{11\pi}{6} + \mathbf{i}\sin\ \frac{11\pi}{6})$

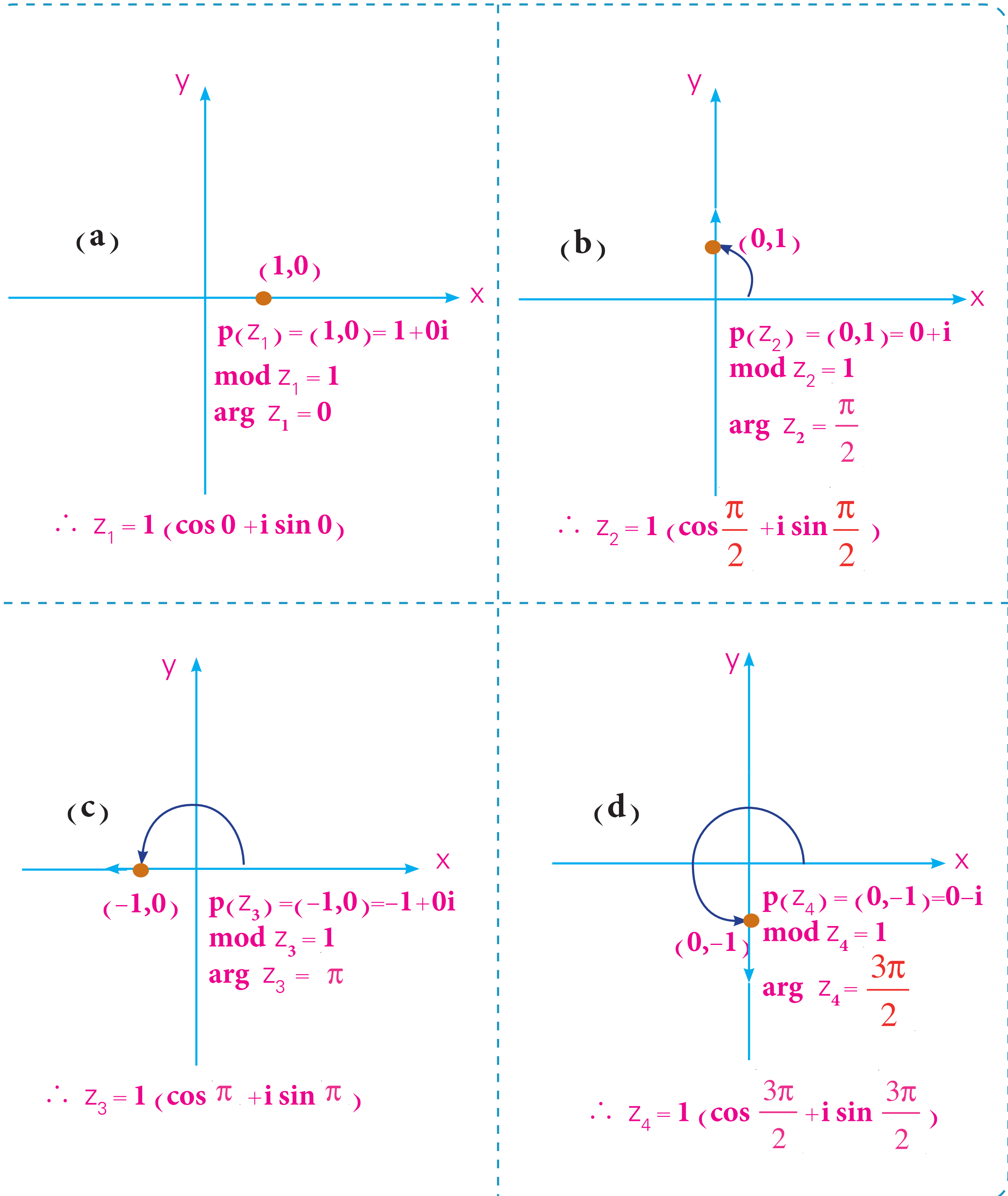
مثال -26-

عبر عن كل من الاعداد الاتية بالصيغة القطبية :

a) 1 b) i c) −1 d) −i

الحل :

لاحظ الاشكال الآتية :



الشكل (1-7)

من المثال السابق نستنتج الاتي :

$$1=(\cos 0+\mathbf{i}\sin 0)$$
$$-1=(\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi)$$
$$\mathbf{i}=(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2})$$
$$-\mathbf{i}=(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2})$$

وبتطبيق الاستنتاج السابق يمكن أن نضع :

$$3=3\times 1=3(\cos 0+\mathbf{i}\sin 0)$$
$$-2=2\times(-1)=2(\cos\pi+\mathbf{i}\sin\pi)$$
$$5\mathbf{i}=5\times\mathbf{i}=5(\cos\frac{\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{2})$$
$$-7\mathbf{i}=7\times(-\mathbf{i})=7(\cos\frac{3\pi}{2}+\mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2})$$

[1-9] مبرهنة ديمواڤر. De Moivre's Theorem

z_1, z_2 يمكن ان تكتب بصورة: $z_1=\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta$, $z_2=\cos\phi+\mathbf{i}\sin\phi$

والان سنجد $z_1 \cdot z_2$ بالصيغة القطبية

$$z_1\times z_2=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)(\cos\phi+\mathbf{i}\sin\phi)$$
$$=\cos\theta\cos\phi+\mathbf{i}\cos\theta\sin\phi+\mathbf{i}\sin\theta\cos\phi+\mathbf{i}^2\sin\theta\sin\phi$$
$$=[\cos\theta\cos\phi-\sin\theta\sin\phi]+\mathbf{i}[\cos\theta\sin\phi+\sin\theta\cos\phi]=\cos(\theta+\phi)+\mathbf{i}\sin(\theta+\phi)$$

ولو كان $(\phi=\theta)$ فان العلاقة تصبح $(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^2=\cos 2\theta+\mathbf{i}\sin 2\theta$

ويمكن برهنتها كما يأتي :

$$\text{LHS}=(\cos\theta+\mathbf{i}\sin\theta)^2=(\cos^2\theta+2\mathbf{i}\sin\theta\cos\theta-\sin^2\theta)$$
$$=(\cos^2\theta-\sin^2\theta)+\mathbf{i}(2\sin\theta\cos\theta)$$
$$=\cos 2\theta+\mathbf{i}\sin 2\theta=\text{RHS}$$

وقد توصل العالم ديمواڤر (1754-1664) الى تعميم العلاقة والتي سميت بمبرهنة ديمواڤر .

مبرهنة ديموافر De Moivre's Theorem

لكل $n \in N$, $\theta \in R$ فإن

$$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^n = \cos n\,\theta + \mathbf{i}\sin n\,\theta$$

البرهان : (للاطلاع فقط)

سنتوصل الى برهان هذه المبرهنة بطريقة الاستقراء الرياضي وكما يأتي :

1) لنعتبر $n = 1$ فان العلاقة تصبح :

$(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^1 = \cos 1\,\theta + \mathbf{i}\sin 1\,\theta$ وهي عبارة صحيحة .

2) لنأخذ $k \geq 1$ ونفترض ان العلاقة صحيحة لكل $n = k$.

أي ان $(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^k = \cos\ k\,\theta + \mathbf{i}\sin\ k\,\theta$ صحيحة فرضاً.

3) يجب ان نثبت ان العلاقة صحيحة عندما $n = k + 1$

$$\therefore (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^1 (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^k$$

$$= (\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)(\cos\ k\theta + \mathbf{i}\sin\ k\theta)$$

$$= \cos(\theta + k\theta) + \mathbf{i}\sin(\theta + k\theta)$$

$$= \cos(k+1)\theta + \mathbf{i}\sin(k+1)\theta$$

وعليه فاذا كانت العلاقة صحيحة عند $\mathbf{n}$ أي $n = k , k \geq 1$ فهي كذلك صحيحة عند $n = k + 1$

وبواسطة الاستقراء الرياضي فان المبرهنة تعتبر صحيحة لجميع قيم $\mathbf{n}$.

مثال -27-

احسب $(\cos\frac{3}{8}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{3}{8}\pi)^4$

الحل :

$$(\cos\frac{3}{8}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{3}{8}\pi)^4$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + \mathbf{i}\sin\frac{3\pi}{2}$$

$$= 0 + \mathbf{i}(-1) = -\mathbf{i}$$

مثال -28-

بين انه لكل $n \in N \ , \ \theta \in R$ فان:

$$(\cos\theta - i\sin\theta)^n = \cos\ n\theta - i\sin\ n\theta$$

الحل :

الطرف الايسر

$$LHS = (\cos\theta - i\sin\theta)^n = [\cos\theta + (-i\sin\theta)]^n$$
$$= [(\cos\theta + i\sin(-\theta)]^n$$
$$= [\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)]^n$$

وبجعل $\phi = -\theta$ تصبح العلاقة

$$= [\cos\phi + i\sin\phi]^n$$
$$= \cos\ n\phi + i\sin n\phi$$
$$= \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)$$
$$= \cos\ n\theta - i\sin\ n\theta$$

الطرف الايمن

$= \ \ \textbf{RHS}$ (و . هـ . م)

نتيجة لمبرهنة ديمواڤر :

لكل $\theta \in R\ ,\ n \in Z^+$ فان

$$\sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left[\cos\frac{\theta + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right] \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$$

مثال -29-

احسب باستخدام مبرهنة ديموافر $(1+i)^{11}$

الحل:

$z = 1 + i$

$$\because \bmod z = \sqrt{2},\ \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}\ ,\ \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \ \therefore \arg z = \frac{\pi}{4}$$

$$\therefore z=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

$$\therefore (1+i)^{11}=(\sqrt{2})^{11}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})^{11}$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{11\pi}{4}+i\sin\frac{11\pi}{4})$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$=2^{\frac{11}{2}}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=2^{5}\sqrt{2}(-\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}})=2^{5}(-1+i)=32(-1+i)$$

ملاحظة

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-1}=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]=(\cos\theta-i\sin\theta)$$

ويمكن تعميم هذه العلاقة بالشكل الاتي :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^{-n}=\cos n\theta-i\sin n\theta$$

مثال -30- حل المعادلة

$x^3+1=0$ حيث $x\in\mathbb{C}$

الحل :

$$x^3+1=0\Rightarrow$$

$$x^3=-1$$

$$x^3=\cos\pi+i\sin\pi$$

$$\therefore x=(\cos\pi+i\sin\pi)^{\frac{1}{3}}$$

$$\therefore x=\cos\frac{\pi+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{3}$$

حيث $k=0,1,2$ لانه جذر تكعيبي

بوضع $k=0$ يكون

$$x_1 = \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

بوضع $k=1$ يكون

$$x_2 = \cos\pi + i\sin\pi$$

$$= -1 + i(0)$$

$$x_2 = -1$$

بوضع $k=2$ يكون

$$x_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}$$

$$x_3 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

اذاً مجموعة الحل للمعادلة هي :

$$\left\{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \;,\; -1 \;,\; \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$$

مثال -31-

اوجد الصيغة القطبية للمقدار : $(\sqrt{3}+i)^2$ ثم جد الجذور الخمسة له

الحل :

ليكن $z = \sqrt{3} + i$ نضع z بالصيغة القطبية:

$$\|z\| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad ، \quad \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6} \qquad \arg(z) = \frac{\pi}{6}$$

$$\therefore z = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow z^2 = 2^2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^2$$

$$z^2 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$\therefore (z^2)^{\frac{1}{5}} = 4^{\frac{1}{5}}\left[\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right]^{\frac{1}{5}}$$

$$= \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5}\right]$$

حيث $k = 0, 1, 2, 3, 4$ لانه جذر خامس

وبوضع $k=0$ يكون

$$Z_1 = \sqrt[5]{4}\left(\cos\frac{\pi}{15} + i\sin\frac{\pi}{15}\right)$$

وبوضع $k=1$ يكون

$$Z_2 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{7\pi}{15} + i\sin\frac{7\pi}{15}\right]$$

وبوضع $k=2$ يكون

$$Z_3 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{13\pi}{15} + i\sin\frac{13\pi}{15}\right]$$

وبوضع $k=3$ يكون

$$Z_4 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{19\pi}{15} + i\sin\frac{19\pi}{15}\right]$$

وبوضع $k=4$ يكون

$$Z_5 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{25\pi}{15} + i\sin\frac{25\pi}{15}\right]$$

$$Z_5 = \sqrt[5]{4}\left[\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right]$$

تمارين (1-5)

1. احسب ما يأتي:

a) $\left[\cos\frac{5}{24}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{5}{24}\pi\right]^4$

b) $\left[\cos\frac{7}{12}\pi + \mathbf{i}\sin\frac{7}{12}\pi\right]^{-3}$

2. احسب باستخدام مبرهنة ديموافر (او التعميم)ما يأتي:

a) $(1-i)^7$ b) $(\sqrt{3}+i)^{-9}$

3. بسط ما يأتي:

a) $\dfrac{(\cos 2\theta + \mathbf{i}\sin 2\theta)^5}{(\cos 3\theta + \mathbf{i}\sin 3\theta)^3}$ b) $(\cos\theta + \mathbf{i}\sin\theta)^8(\cos\theta - \mathbf{i}\sin\theta)^4$

Hint: $x^4 y^4 = (xy)^4$

4. جد الجذور التربيعية للعدد المركب $-1+\sqrt{3}\,i$ بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر ثم الطريقة المعروضة في البند [1-4].

5. بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر جد الجذور التكعيبية للعدد **27i**.

6. جد الجذور الاربعة للعدد (16-) بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

7. جد الجذور الستة للعدد (64i-) بأستخدام نتيجة مبرهنة ديموافر.

2

الفصل الثاني

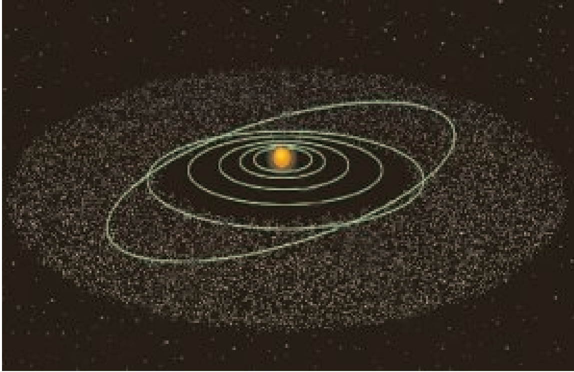
Chapter Two

Conic Sections القطوع المخروطية

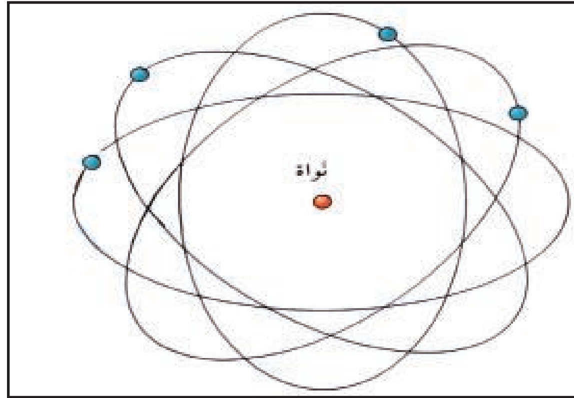
الرمز او العلاقة الرياضية	المصطلح
F	البؤرة قبل الانسحاب
$\bar{F}$	البؤرة بعد الانسحاب
$e=\frac{c}{a}$	الاختلاف المركزي
$2a$	العدد الثابت

القطوع المخروطية واهمية دراستها :

لنبحث اولاً عن وجود مثل هذه القطوع في الكون والطبيعة سوف ترى الكواكب والنجوم تتحرك على مدارات اهليلجية .(اي المدارات تشبه القطع الناقص)



وفي الذرة والالكترون يلاحظ المختصون بان الالكترونات تدور حول النواة على مدارات اهليلجية ايضاً ، ومن التطبيقات الاخرى للقطوع المخروطية استخدامها في انتشار الصوت حيث نلاحظها في الات تكبير الصوت الحديثة وكذلك تستخدم في انتشار الضوء كما في ضوء السيارة فهو مجسم مكافئ وضع في بؤرته مصباحاً . عندما ينطلق شعاع ضوئي من المصباح ينعكس هذا الشعاع على السطح المجسم وبصورة افقية . وكذلك جميع الاشعة المنطلقة من المصباح مما يؤدي الى انارة الطريق امام السيارة . ومن التطبيقات الاخرى نلاحظها من خلال الصور التالية :









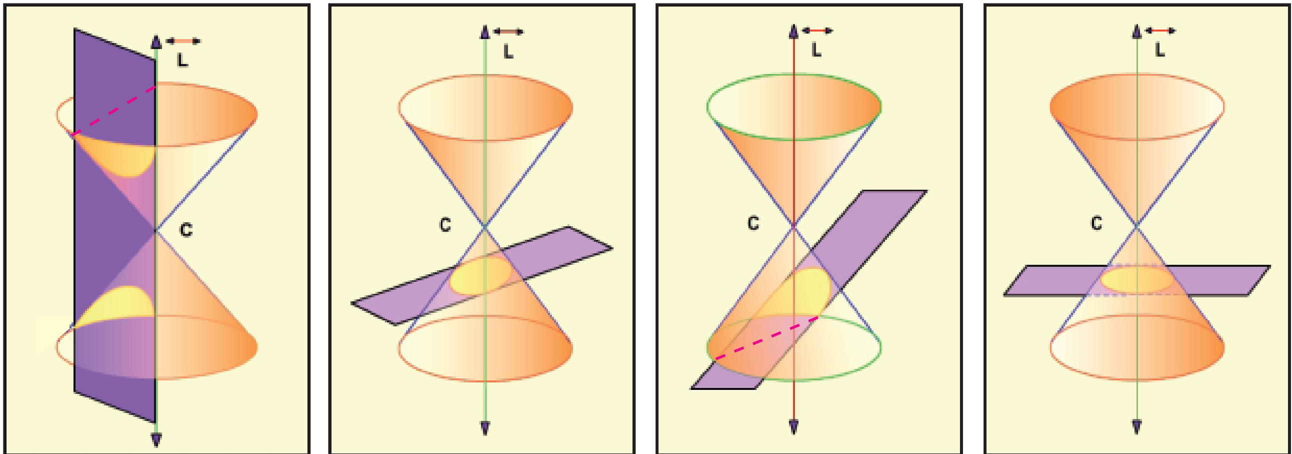
نلاحظ مما سبق مدى اهمية القطوع المخروطية التي اصبحت دراستها محل اهتمام الرياضيين والفلكيين وعلماء الفضاء والميكانيكيين وكان للحضارة العربية الاسلامية دور هام في مواصلة هذه الدراسات بعد اطلاعهم على اعمال الرياضيين الاغريق امثال مينشم ، وابولتيوس ، وبابوس . ومن العلماء العرب الذين اهتموا بالقطوع المخروطية ثابت بن قرة وابو جعفر الخازن ، واباسهل الكوهي ، وابن الهيثم وغيرهم كثيرون .

سبق وتعرفنا في الصف الخامس العلمي على كيفية تولد القطوع المخروطية : الدائرة - القطع المكافئ- القطع الناقص- القطع الزائد . حيث يتم الحصول على هذه القطوع هندسياً وكالاتي :

اذا قطع سطح المخروط الدائري القائم

- بمستوٍ عمودي على محور المخروط الدائري القائم ولا يحوي رأس المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى دائرة (**Circle**) .
- بمستوٍ موازٍ لأحد مولداته فأن المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع المكافئ "**Parabola**" .
- بمستوٍ غير موازٍ لقاعدته ولا يوازي احد مولداته فأن القطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الناقص "**Ellipse**".
- بمستوٍ يوازي محور المخروط الدائري القائم ويقطع مولدين من مولدات المخروط الدائري القائم فان المقطع يمثل شكلاً هندسياً يسمى القطع الزائد "**Hyperbola**" .

لاحظ الاشكال التالية للقطوع المخروطية :



زائد ناقص مكافئ دائرة

الشكل (1-2)

[2-1] القطع المخروطي:

لتكن (x_1,y_1) نقطة ثابتة في المستوي وليكن $ax + by + c = 0$ مستقيماً ثابتاً في المستوي نفسه، عندئذ مجموعة كل النقاط التي نسبة بُعد كل منها عن النقطة (x_1, y_1) الى بعدها عن المستقيم $ax + by + c = 0$ تساوي عدداً ثابتاً (e) تكون شكل هندسي يسمى بالقطع المخروطي .

مما سبق نلاحظ ان لكل قطع مخروطي (ما عدا الدائرة) ثلاثة مفاهيم اساسية يتعين بها هي:

1- النقطة الثابتة (x_1,y_1) تسمى بؤرة القطع المخروطي **"Focus"** .

2- المستقيم الثابت $ax + by + c = 0$ يسمى دليل القطع المخروطي **"Directrix"**.

3- النسبة (e) تسمى بالاختلاف المركزي **"Eccentricity"**.

ملاحظة

$e = 1$	في القطع المكافئ	«Parabola»
$e < 1$ ، $0 < e < 1$	في القطع الناقص	«Ellipse»
$e > 1$	في القطع الزائد	«Hyperbola»

[2-1-1] المعادلة العامة للقطع المخروطي:

من تعريف القطع المخروطي نستنتج المعادلة العامة وذلك كما يأتي:

لتكن (x, y) نقطة على القطع المخروطي ، عندئـذ المسـافة بيـن (x,y) والبؤرة (x_1 , y_1) هي :

$$\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}$$

والبعد بين (x, y) والدليل $ax+by+c=0$ هي : $\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

وبموجب تعريف القطع المخروطي فان النسبة بين هاتين المسافتين تساوي (e) اي ان

$$\frac{\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}}{\dfrac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}=e$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=e\cdot\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

وبتربيع الطرفين نحصل على معادلة القطع المخروطي العامة وهي معادلة من الدرجة الثانية

$$\boxed{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=e^2\cdot\frac{(ax+by+c)^2}{a^2+b^2}}$$

ملاحظة : سنطبق هذه المعادلة على القطع المكافئ لأنه قد تم تعريف الدليل

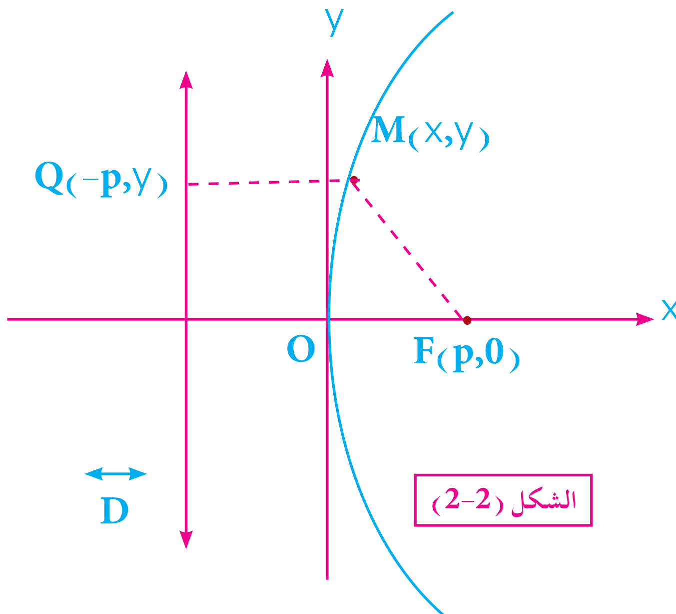
[2-2] القطع المكافئ: Parabola

القطع المكافئ هو مجموعة النقط $M(x, y)$ في المستوي والتي يكون بُعد كل منها عن نقطة ثابتة $F(p,0)$ تسمى البؤرة حيث $P>0$ مساوياً دائماً لبعدها عن مستقيم معلوم "D" يسمى الدليل لا يحوي البؤرة .

اي ان $MF=MQ$ لاحظ الشكل $(2-2)$:

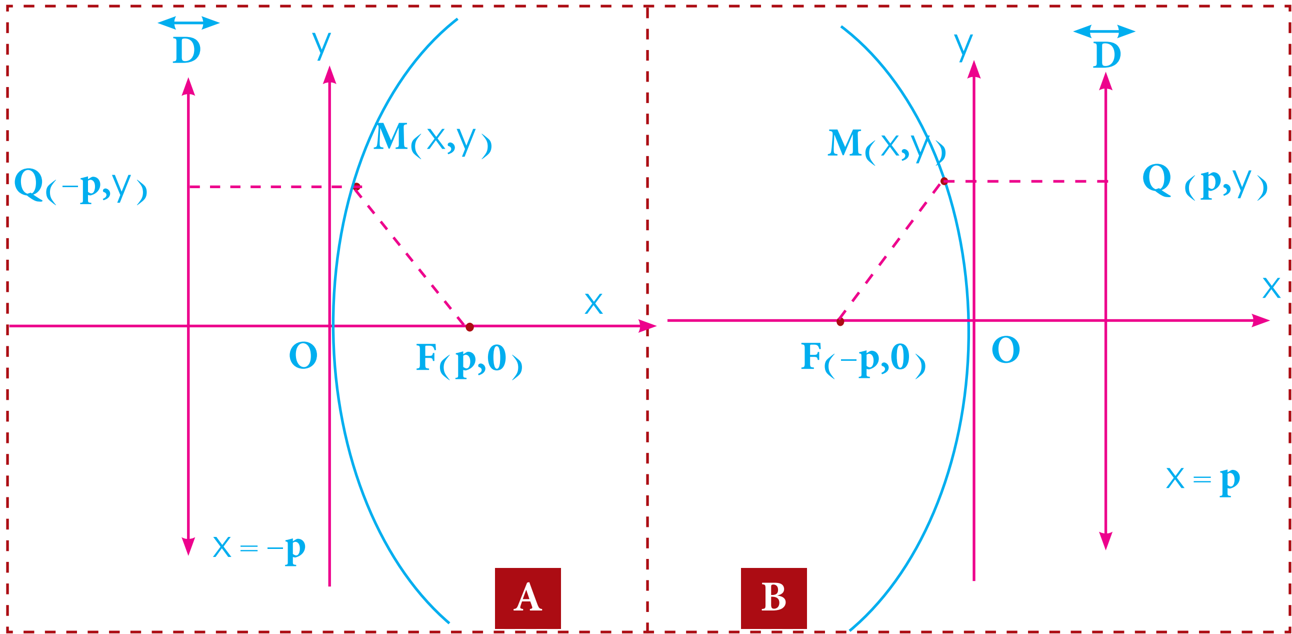
وتسمى النقطة "O" برأس القطع المكافئ "Vertex"

ويسمى المستقيم (x) المار بالبؤرة والعمود على الدليل بمحور القطع المكافئ .حيث لاحظ ان $\dfrac{MF}{MQ}=e=1$



الشكل (2-2)

[2-2-1] معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور السينات (x-axis) والرأس في نقطة الأصل



الشكل (2-3)

في المستوي الديكارتي المتعامد المحورين وبناءاً على تعريف القطع المكافئ يمكن ايجاد معادلة القطع المكافئ في ابسط صورة ممكنة وكما يأتي :

لتكن النقطة $F(p,0)$ هي بؤرة القطع المكافئ والمستقيم D هو دليل القطع المكافئ ، والنقطة $Q(-p,y)$ نقطة على الدليل حيث $\overline{MQ}$ عمودي على المستقيم D ، والنقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ والرأس في نقطة الاصل $(0,0)$. كما في الشكل $(2-3)$ (A) . من تعريف القطع المكافئ .

$$MF = MQ$$

$$\sqrt{(x-p)^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+p)^2+(y-y)^2}$$

بتربيع الطرفين

$$\sqrt{x^2-2px+p^2+y^2}=\sqrt{x^2+2xp+p^2}$$

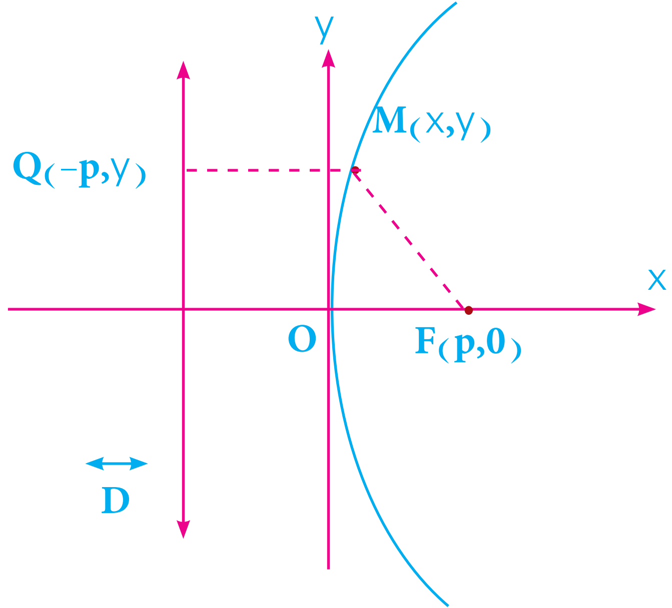
بالتبسيط

$$x^2-2px+p^2+y^2=x^2+2xp+p^2$$

(المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل وبؤرته تنتمي لمحور السينات)

$$\boxed{y^2=4px\ ,\ \forall p>0}$$

ومعادلة الدليل $x=-p$



الشكل (4-2)

مثال -1- جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2=-8x$

$$y^2=-8x$$

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $y^2=-4px$

$$\Rightarrow 4p=8 \Rightarrow p=\frac{8}{4}=2>0$$

$$\therefore \boxed{p=2}$$

$$F(-p,0)=F(-2,0)$$

معادلة الدليل $x=p$

$$\therefore \boxed{x=2}$$

مثال -2-

جد معادلة القطع المكافئ اذا علم:

أ) بؤرته (3,0) والرأس نقطة الاصل .

ب) معادلة الدليل $2x - 6 = 0$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل

أ)

$(p,0) = (3,0)$

$\Rightarrow p = 3$

$\therefore y^2 = 4px$ (المعادلة القياسية)

$\Rightarrow y^2 = (4)(3)x = 12x$

$y^2 = 12x$

ب) من معادلة الدليل

$2x - 6 = 0$

$2x = 6 \Rightarrow x = 3$

$\therefore p = 3$ (بفضل التعريف)

بتطبيق المعادلة القياسية

$y^2 = -4px$

$y^2 = (-4)(3)x = -12x \Rightarrow y^2 = -12x$

مثال -3-

جد بؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $y^2 = 4x$ ثم أرسمه:

الحل

بالمقارنة مع معادلة القطع المكافئ :

$y^2 = 4px$

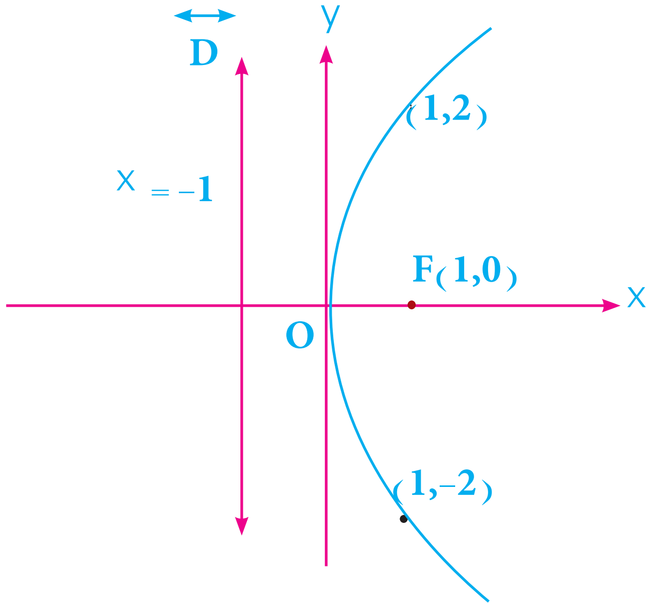
$\Rightarrow 4p = 4 \Rightarrow p = 1$

$F(1, 0)$ البؤرة

$x = -1$ معادلة الدليل

$y^2 = 4x \Rightarrow y = \pm 2\sqrt{x}$

x	0	1	2
y	0	±2	$\pm 2\sqrt{2}$



الشكل (5-2)

مثال -4-

باستخدام التعريف جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان بؤرته $(\sqrt{3},0)$ والرأس في نقطة الأصل.

الحل

البؤرة $F(\sqrt{3},0)$ ، ولتكن النقطة $M(x,y)$ من نقط منحني القطع المكافئ، والنقطة $Q(-\sqrt{3},y)$ هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل $\overleftrightarrow{D}$ ومن تعريف القطع المكافئ.

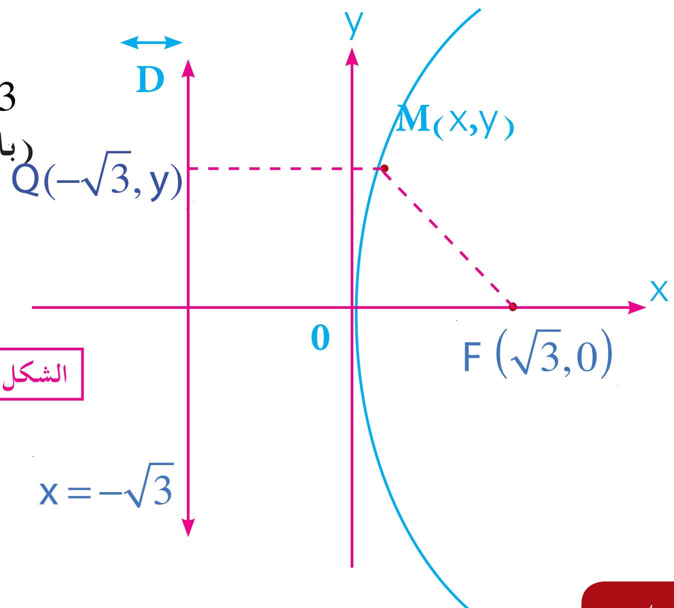
$$\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y-0)^2}=\sqrt{(x+\sqrt{3})^2+(y-y)^2}$$ (بتربيع الطرفين)

$$(x-\sqrt{3})^2+y^2=(x+\sqrt{3})^2$$

$$x^2-2\sqrt{3}x+3+y^2=x^2+2\sqrt{3}x+3$$ (بالتبسيط)

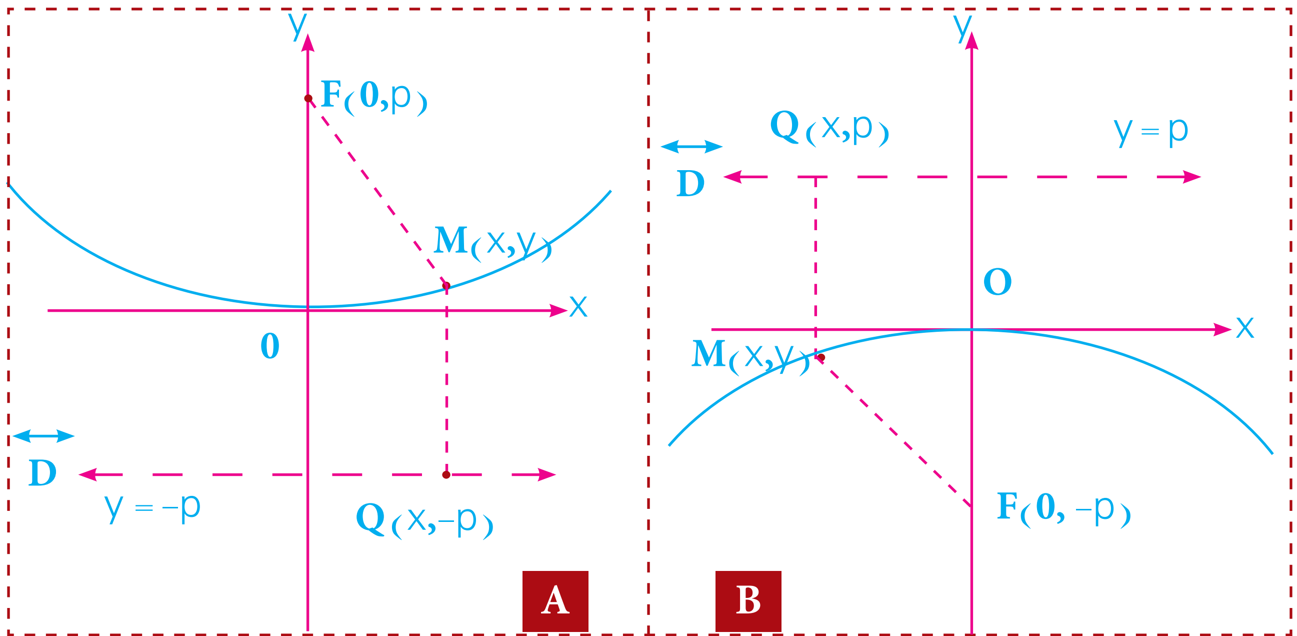
$$y^2=4\sqrt{3}x$$

(معادلة القطع المكافئ)



الشكل (6-2)

[2-2-2] معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته تنتمي لمحور الصادات (y-axis) والرأس في نقطة الأصل



الشكل (2-7)

في المستوي الديكارتي المتعامد المحورين لتكن النقطة (F(0,p هي بؤرة القطع المكافئ ، والمستقيم D دليل القطع المكافئ والنقطة (Q(x,-p هي نقطة تقاطع العمود المرسوم من M على الدليل ، والنقطة (M(x,y من نقط منحنى القطع المكافئ والرأس في نقطة الاصل (0, 0) كما في الشكل (2-7) A

وبناءاً على تعريف القطع المكافئ فان MF = MQ

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2+(y-p)^2}=\sqrt{(x-x)^2+(y+p)^2}$$ (بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow x^2+(y-p)^2=(y+p)^2$$

$$x^2+y^2-2py+p^2=y^2+2py+p^2$$ (بالتبسيط)

$$x^2=2py+2py$$

$$x^2=4py \quad , \quad \forall p>0$$ المعادلة القياسية للقطع المكافئ

الجدول الاتي يمثل المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه في نقطة الاصل حيث P>0

المعادلة	البؤرة	الدليل	المحور	فتحة القطع
$x^2 = 4py$	(0 , p)	y= -p	y- axis	نحو الاعلى
$x^2 = - 4py$	(0 , - p)	y = p	y- axis	نحو الاسفل
$y^2 = 4px$	(p , 0)	x = -p	x- axis	نحو اليمين
$y^2 = - 4px$	(-p , 0)	x = p	x- axis	نحو اليسار

مثال -5-

جد البؤرة ومعادلة دليل القطع المكافئ $3x^2 - 24y = 0$.

الحل

$3x^2 - 24y = 0$ [بقسمة طرفي المعادلة على (3)]

$x^2 = 8y$

$x^2 = 4py$ بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ

$\Rightarrow 4p = 8 \Rightarrow p=2$

ومن قيمة P نجد

البؤرة $F(0,2)$

معادلة الدليل $y = -2$

مثال -6-

جد معادلة القطع المكافئ اذا علم ان :-

أ) بؤرته (0,5) ورأسه نقطة الاصل .

ب) معادلة الدليل $y = 7$ ورأسه نقطة الاصل .

الحل (أ)

$F(0,5) \Rightarrow p=5$

$x^2 = 4py$ المعادلة القياسية

$x^2 = 20y$ (معادلة القطع المكافئ)

الحل (ب)

$y = 7$

$p = 7$

$x^2 = -4py$ (المعادلة القياسية)

$x^2 = -28y$

مثال -7-

جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين (2,4) ، (2 , -4) ورأسه نقطة الاصل .

الحل

النقطتان متناظرتان حول المحور السيني .

اذاً المعادلة القياسية

$$y^2 = 4px \quad , \quad \forall p > 0$$

نعوض احدى النقطتين اللتين تحققان المعادلة القياسية ولتكن النقطة (2 ,4)

$$16 = (4)(p)(2)$$

$$16 = 8p \Rightarrow p = \frac{16}{8} \Rightarrow p = 2$$

نعوض $p = 2$ في المعادلة القياسية

$$y^2 = (4)(2)x$$

$$y^2 = 8x$$ معادلة القطع المكافئ

مثال -8-

جد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر دليل القطع المكافئ بالنقطة (3 ,-5)

الحل

يوجد احتمالين للمعادلة القياسية لعدم تحديد موقع البؤرة هما :

اولاً : البؤرة تنتمي لمحور الصادات

$x^2 = 4py$

$y = -5$ معادلة الدليل

$p = 5$

$x^2 = 4py$

$x^2 = 20y$

ثانياً : البؤرة تنتمي لمحور السينات

$y^2 = 4px$

$x = 3$ معادلة الدليل

$p = 3$

$y^2 = -4px$ (المعادلة القياسية)

$y^2 = -12x$

[2-3] إنسحاب المحاور للقطع المكافئ :

[2-3-1] المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي محوره يوازي أحد المحورين الأحداثيين ورأسه النقطة (h,k)

في البنود السابقة تعرفنا على المعادلتين القياسيتين للقطع المكافئ وهما :

$y^2 = 4px$ .... (1)

$x^2 = 4py$ .... (2)

المعادلة الاولى : هي معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور السينات ورأسه نقطة الاصل (0,0) .

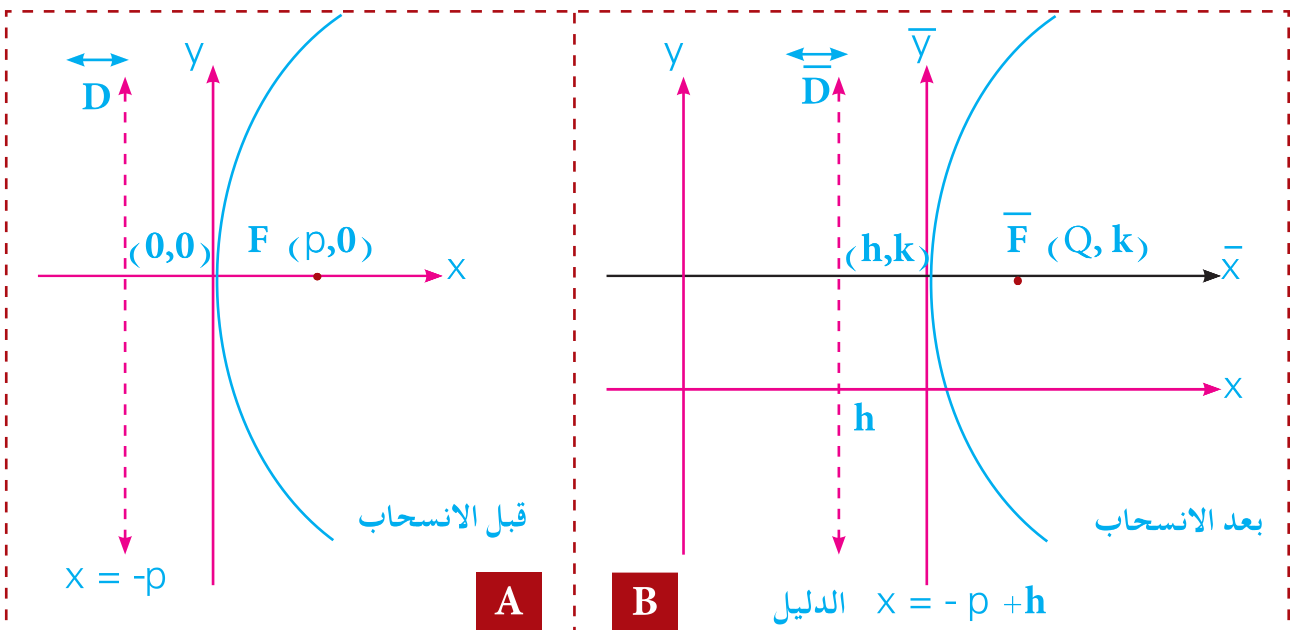
المعادلة الثانية : معادلة قطع مكافئ بؤرته تنتمي لمحور الصادات ورأسه نقطة الاصل (0,0) .

فاذا كان الرأس هو النقطة $\overline{O}$ (h , k) فان المعادلتين القياسيتين هما :

$(y - k)^2 = 4p(x - h)$ ...... (3)

$(x - h)^2 = 4p(y - k)$ ...... (4)

المعادلة الثالثة : تمثل المعادلة القياسية للقطع المكافئ الذي رأسه النقطة $\overline{O}$ (h,k) ومحوره يوازي محور السينات . لاحظ في الشكل (8 - 2) الانسحاب لمكونات القطع المكافئ .



الشكل (8-2)

انسحاب $O(0,0) \longrightarrow \overline{O}(h,k)$

انسحاب $F(p,0) \longrightarrow \overline{F}(p+h,k)$

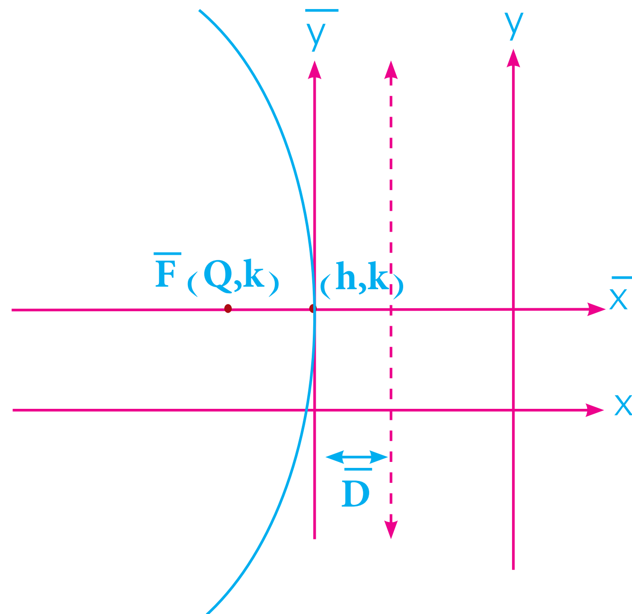
انسحاب $x=-p \longrightarrow x=-p+h$

معادلة المحور $y=k$

حيث (p) في المعادلة (3) ، (4) هو البعد البؤري للقطع المكافئ ويساوي المسافة بين الرأس $\overline{O}$ والبؤرة $\overline{F}$ ويساوي البعد بين الرأس ومعادلة الدليل اي ان : $P=|Q-h|$

ويمكن ان تكون فتحة القطع المكافئ بالاتجاه السالب لمحور السينات كما في الشكل $(9-2)$:

$(y-k)^2=-4p(x-h)$	
$(Q,k)=(h-p,k)$	البؤرة
$x=p+h$	معادلة الدليل
$y=k$	معادلة المحور



الشكل $(9-2)$

ملاحظة في البند [3 − 2] (انسحاب المحاور) سنكتفي فقط في ايجاد بؤرة ورأس القطع المكافئ ومعادلة الدليل ومعادلة المحور.

مثال -9- من معادلة القطع المكافئ $(y+1)^2 = 4(x-2)$

عين الرأس ، البؤرة ، معادلة المحور ، معادلة الدليل.

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع المكافئ.

$$(y+1)^2 = 4(x-2)$$

$$(y-k)^2 = 4p(x-h)$$

$$\Rightarrow h = 2 \quad , \quad k = -1$$

$$\therefore (h, k) = (2, -1) \quad \text{(الرأس)}$$

$$4p = 4$$

$$\Rightarrow p = 1$$

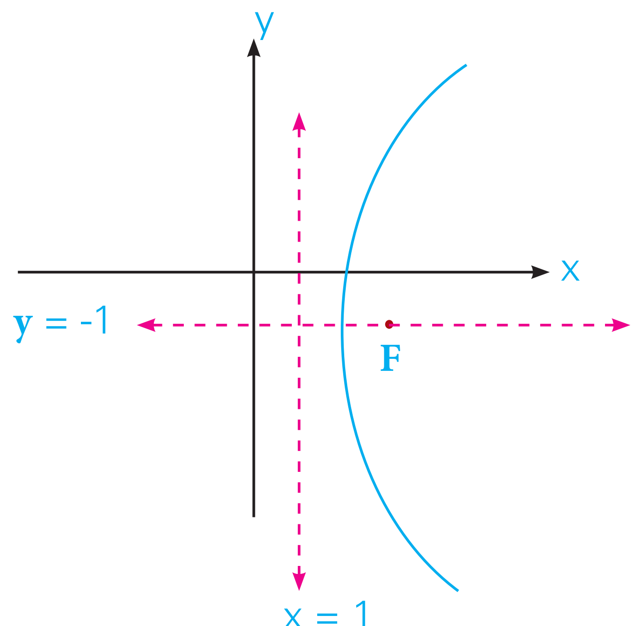
$$\therefore F(p+h, k) = F(1+2, -1) = F(3, -1) \quad \text{(البؤرة)}$$

$y = k$ معادلة المحور

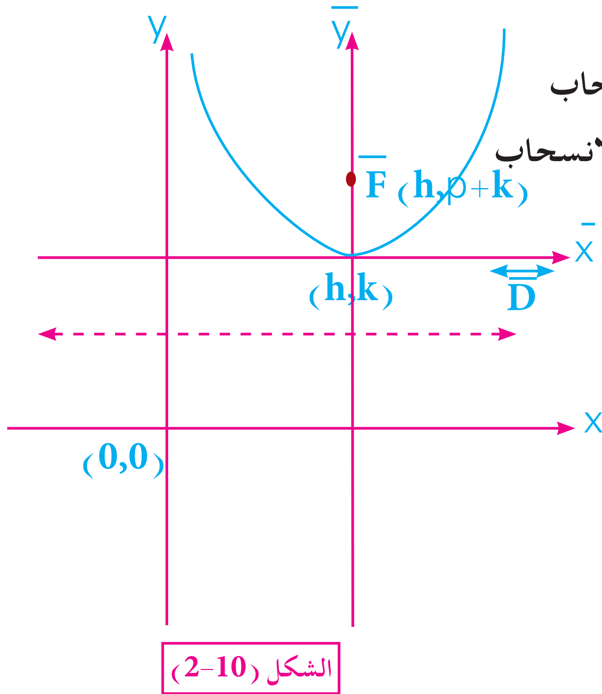
$$\therefore y = -1$$

$$x = -p + h$$

$x = -1 + 2 = 1 \Rightarrow x = 1$ معادلة الدليل



المعادلة الرابعة : تمثل المعادلة القياسية للقطع المكافئ راسه النقطة (h , k) ومحوره يوازي المحور الصادي لاحظ الانسحاب لمكونات القطع المكافئ . كما في الشكل $(2-10)$.



الشكل $(2-10)$

انسحاب $O(0,0) \leftarrow \bar{O}(h,k)$ الراس بعد الانسحاب

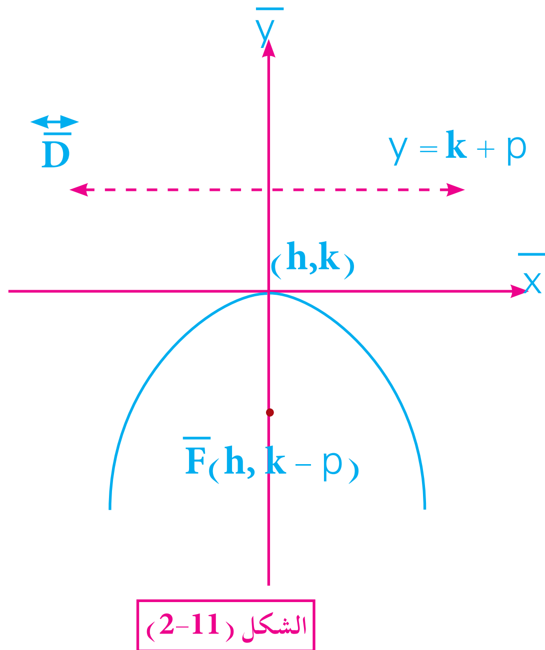
انسحاب $F(0,p) \leftarrow \bar{F}(h, Q)$ البؤرة بعد الانسحاب

$Q = p + k$

$\Rightarrow \quad p = |Q - k|$ (البعد البؤري)

$x = h$ معادلة المحور

معادلة الدليل $y = k - p$



الشكل $(2-11)$

$(x-h)^2 = -4p(y-k)$
البؤرة $(h , k-p)$
معادلة الدليل $y = k + p$
معادلة المحور $x = h$

مثال -10- ناقش القطع المكافئ: $y = x^2 + 4x$

الحل

نضيف 4 الى طرفي المعادلة حتى نضع حدود x في شكل مربع كامل ، فنكتب :

$$y + 4 = x^2 + 4x + 4$$

$$y + 4 = (x+2)^2$$

هذه المعادلة من الشكل :

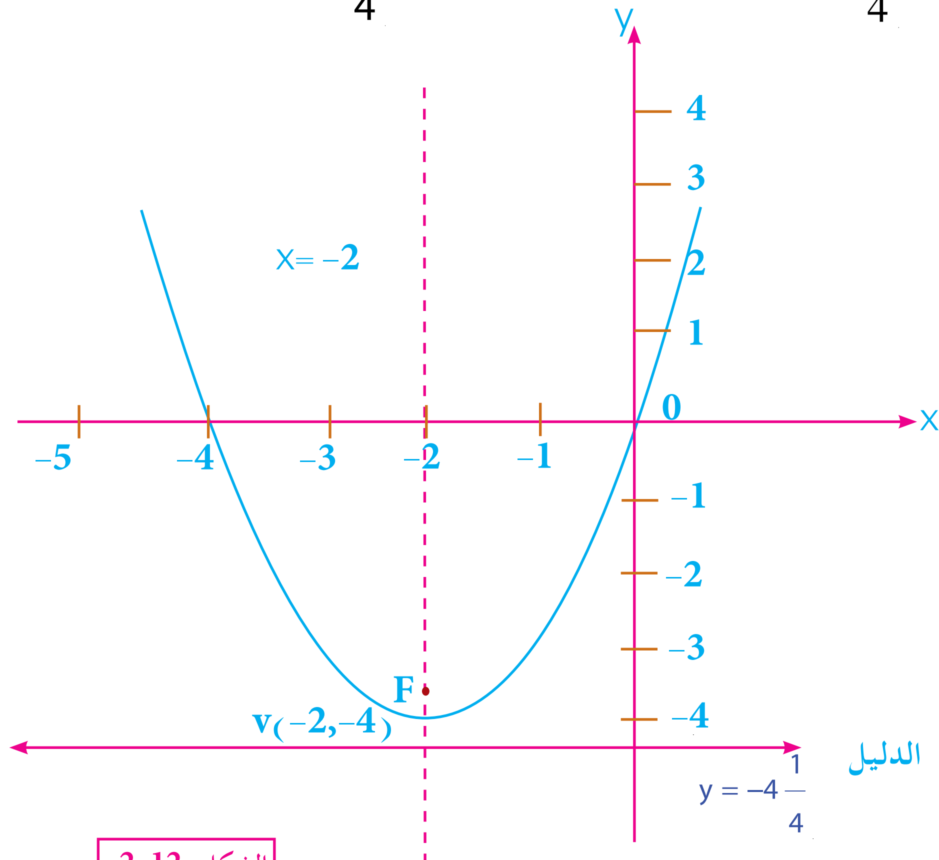
$$(x - h)^2 = 4p(y - k)$$

حيث

$h=-2 \ , \ k=-4 \Rightarrow$ الرأس $(-2,-4)$

$$4p=1 \ , \ p=\frac{1}{4}$$

هذا القطع المكافئ مفتوح الى الاعلى لان من اجل قيم x الحقيقية ولقيم $y \geq -4$ وراسه $v(-2,-4)$ تقع البؤرة على بعد $\frac{1}{4}$ وحدة من رأس القطع ونحو الاعلى ،اي عند $F(-2,-3\frac{3}{4})$ وان الدليل موازٍ للمحور x ويبعد $4\frac{1}{4}$ وحدة من المحور x . ومعادلته هي $y=-4\frac{1}{4}$.



الشكل (2-12)

تمارين (1-2)

1. جد المعادلة للقطع المكافئ في كل مما يأتي ثم ارسم المنحني البياني لها .

أ- البؤرة $(5, 0)$ والرأس نقطة الاصل .

ب- البؤرة $(-4, 0)$ والرأس نقطة الاصل .

ج- البؤرة $(0, \sqrt{2})$ والرأس نقطة الاصل.

د- معادلة دليل القطع المكافئ $4y - 3 = 0$ والرأس نقطة الاصل .

2. في كل مما يأتي جد البؤرة والرأس ومعادلتي المحور والدليل للقطع المكافئ:-

a) $x^2 = 4y$ b) $2x + 16y^2 = 0$ c) $y^2 = -4(x-2)$

d) $(x - 1)^2 = 8(y-1)$ e) $y^2+4y + 2x = -6$ f) $x^2+ 6x - y = 0$

3. جد معادلة القطع المكافئ الذي يمر بالنقطتين $(5, -2)$ ، $(-5, 2)$ والراس في نقطة الاصل.

4. اذا كان دليل القطع المكافئ يمر بالنقطة $(-3, 4)$ والرأس في نقطة الاصل جد معادلته علماً ان بؤرته تنتمي لأحد المحورين .

5. قطع مكافئ معادلته $Ax^2+8y= 0$ يمر بالنقطة $(1, 2)$ جد قيمة A ثم جد بؤرته ودليله و أرسم القطع.

6. باستخدام التعريف . جد معادلة القطع المكافئ

أ- البؤرة $(7, 0)$ والرأس نقطة الاصل.

ب- معادلة الدليل $y = \sqrt{3}$. والرأس نقطة الاصل .

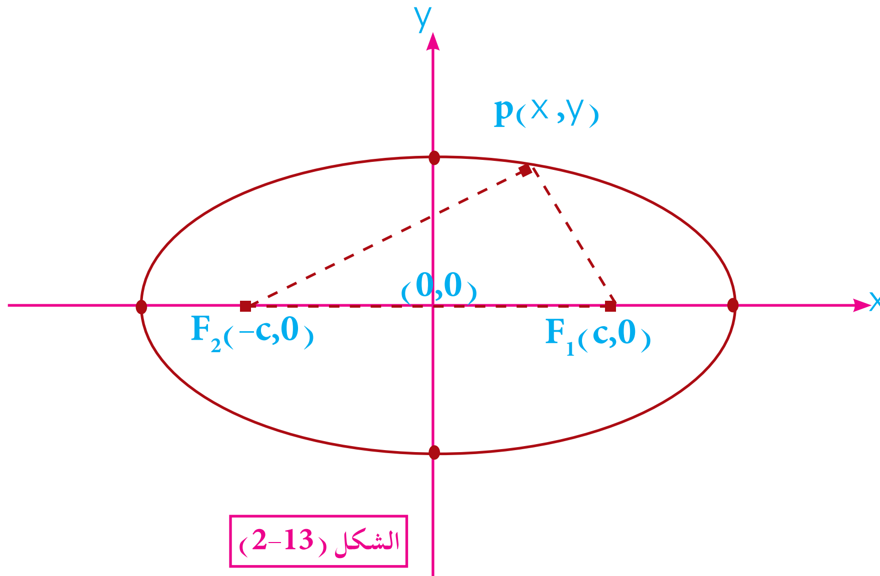
[2-4] القطع الناقص :Ellipse

تعـــريـف [2-4] Definition

القطع الناقص مجموعة من النقط في المستوي التي يكون مجموع بعديها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) عدد ثابت .

[2-4-1] قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

كما في الشكل (2 - 13)



الشكل (2-13)

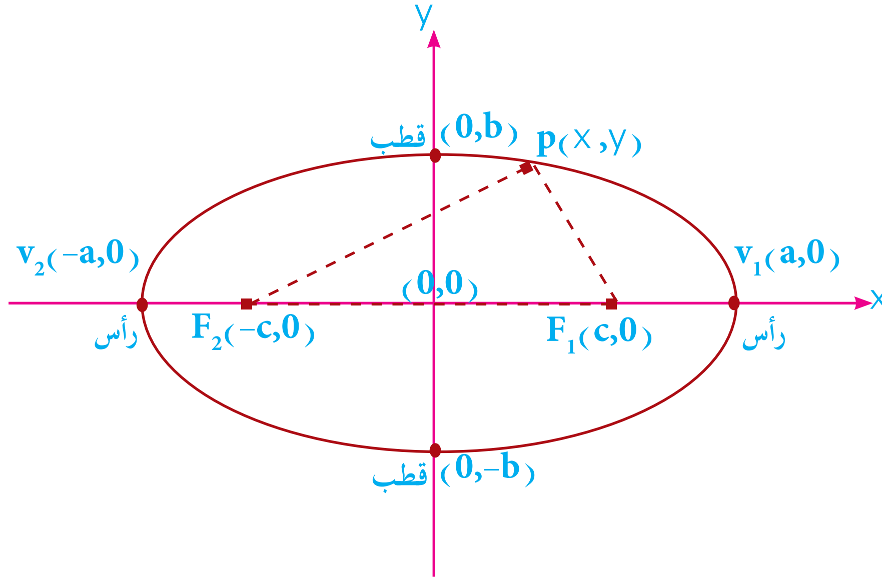
بؤرتا القطع الناقص هما $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ والعدد الثابت هو $2a$, $a > 0$, $c > 0$

تسمى النقطة التي تقع في منتصف القطعة المستقيمة الواصلة بين البؤرتين بمركز القطع الناقص (**Center**)، ويسمى المستقيم المار بالبؤرتين بالمحور البؤري (**Focal axis**) ويقطع القطع الناقص في نقطتين تسميان رأسا القطع وتسمى قطعة المستقيم الواصلة بين الرأسين بالمحور الكبير (**Major axis**) وطولها ($2a$) ايضاً ويساوي مجموع بعدي اي نقطة $P(x, y)$ من نقاط القطع الناقص عن البؤرتين اي ان :

$$pF_1 + pF_2 = 2a$$

وتسمى القطعة المستقيمة الواصلة بين نقطتي تقاطع المستقيم العمود على المحور الكبير من مركز القطع الناقص

مع القطع الناقص بالمحور الصغير (Minor axis) وطولها (2b) حيث b>0 ونهايتاه تسميان القطبين.



الشكل (2-14)

[2-4-2] معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

لاحظ الشكل (2 - 14) $\because \quad PF_1 + PF_2 = 2a$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+(y-0)^2}+\sqrt{(x+c)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

(بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

$$\Rightarrow (x-c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+(x+c)^2+y^2$$

$$\Rightarrow \cancel{x^2}-2cx+\cancel{c^2}+\cancel{y^2}=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\cancel{x^2}+2cx+\cancel{c^2}+y^2$$

(بقسمة طرفي المعادلة على 4)

$$\Rightarrow 4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=4a^2+4cx$$

(بتربيع طرفي المعادلة)

$$\Rightarrow a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+cx$$

$$a^2\left[x^2+2cx+c^2+y^2\right]=a^4+2a^2cx+c^2x^2$$

بالتبسيط

$$a^2x^2+\cancel{2a^2cx}+a^2c^2+a^2y^2=a^4+\cancel{2a^2cx}+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$\boxed{x^2(a^2-c^2)+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)} \quad ....(1)$$

بما ان $a > c$ دائماً فان $a^2 - c^2 > 0$ وبفرض ان $b^2 = a^2 - c^2$ حيث $b > 0$

$$\Rightarrow \boxed{b^2 = a^2 - c^2} \ldots\ldots\ldots(2)$$

نعوض 2 في 1

$$\Rightarrow x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$

بقسمة طرفي المعادلة على $a^2\ b^2$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

تمثل المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

وتسمى النسبة $\frac{c}{a}$ بالاختلاف المركزي .

أي ان $e = \frac{c}{a}$ ويكون دائماً اقل من الواحد .

[3-4-2] معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان تنتميان لمحور الصادات .

لاحظ الشكل (2 - 15)

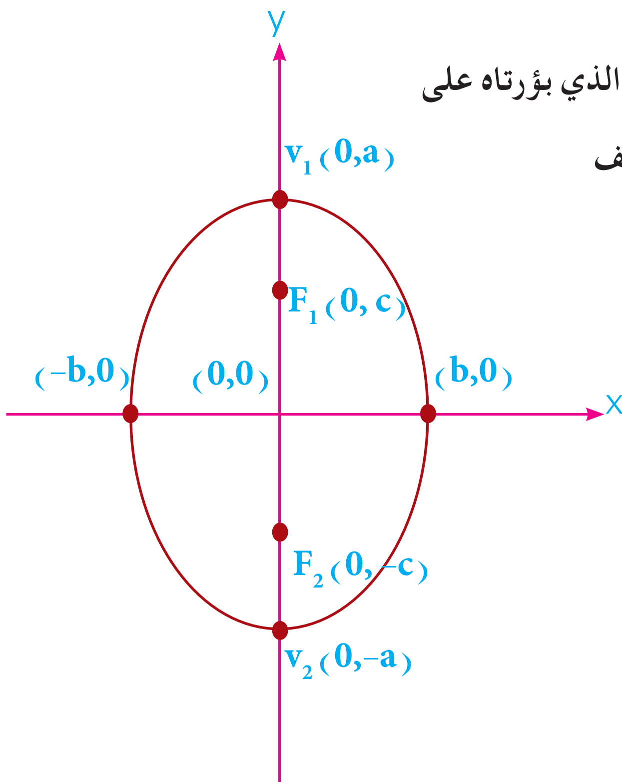
بنفس خطوات الاشتقاق السابق لمعادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل وباستخدام التعريف

نحصل على المعادلة :

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

حيث البؤرتان على محور الصادات والمركز في نقطة الاصل .

نلخص ما سبق بالجدول الآتي :



الشكل (2-15)

قطع ناقص بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل .	قطع ناقص بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .
المعادلة $\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$	1) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
البؤرتان $F_1(0,c)$, $F_2(0,-c)$	2) $F_1(c,0)$, $F_2(-c,0)$
الرأسان $V_1(0,a)$, $V_2(0,-a)$	3) $V_1(a,0)$, $V_2(-a,0)$

4) $c=\sqrt{a^2-b^2}$

5) $a > c$, $a > b$

6) $2a =$ طول المحور الكبير

7) $2b =$ طول المحور الصغير

8) $2c =$ المسافة بين البؤرتين

مساحة منطقة القطع الناقص ويرمز لها A (Area)

9) $A = ab\pi$:

محيط القطع الناقص ويرمز له P (Perimeter)

10) $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$, $\pi=\frac{22}{7}$

"e" الاختلاف المركزي ويكون دائماً اقل من الواحد $(e<1)$,

11) $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$

مثال -11-

في كل مما يأتي جد طول كل من المحورين واحداثي كل من البؤرتين والرأسين والاختلاف المركزي .

1) $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

2) $4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$

الحل (1)

بالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ حيث $a > b$.

طول المحور الكبير وحدة $\Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$

طول المحور الصغير وحدة $b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 2b=8$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-16}=\sqrt{9}=3$$

$$\therefore c=3$$

البؤرتان $\therefore F_1(3,0)\ ,\ F_2(-3,0)$

الرأسان $V_1(5,0)\ ,\ V_2(-5,0)$

(الاختلاف المركزي) $e=\frac{c}{a}=\frac{3}{5} < 1$

الحل (2)

بضرب طرفي المعادلة بـ $\frac{3}{4}$

$$4x^2+3y^2=\frac{4}{3}$$

$$3x^2+\frac{9y^2}{4}=1$$

$$\frac{x^2}{\frac{1}{3}}+\frac{y^2}{\frac{4}{9}}=1$$

طول المحور الكبير وحدة $\Rightarrow a^2=\frac{4}{9} \Rightarrow a=\frac{2}{3} \Rightarrow 2a=\frac{4}{3}$

طول المحور الصغير وحدة $b^2=\frac{1}{3} \Rightarrow b=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow 2b=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$$c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{\frac{4}{9}-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{1}{9}}=\frac{1}{3}$$

البؤرتان $F_1\left(0,\frac{1}{3}\right)\ ,\ F_2\left(0,-\frac{1}{3}\right)$

الرأسان $V_1\left(0,\frac{2}{3}\right)\ ,\ V_2\left(0,-\frac{2}{3}\right)$

(الاختلاف المركزي) $\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}}=\frac{1}{2} < 1$

مثال -12-

جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$ ورأساه النقطتان $V_1(5,0)$, $V_2(-5,0)$ ومركزه نقطة الاصل.

الحل

البؤرتان والرأسان يقعان على محور السينات والمركز في نقطة الاصل :

$$\therefore \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow c=3 \Rightarrow c^2=9$$

$$\Rightarrow a=5 \Rightarrow a^2=25$$

$$\Rightarrow c^2=a^2-b^2 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=25-9=16$$

معادلة القطع الناقص $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

مثال -13-

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ويقطع من محور السينات جزءاً طوله 8 وحدات ومن محور الصادات جزءاً طوله 12 وحدة، ثم جد المسافة بين البؤرتين ومساحة منطقته ومحيطه.

الحل

$$2b=8 \Rightarrow b=4 \Rightarrow b^2=16$$

$$2a=12 \Rightarrow a=6 \Rightarrow a^2=36$$

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$$

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}$$

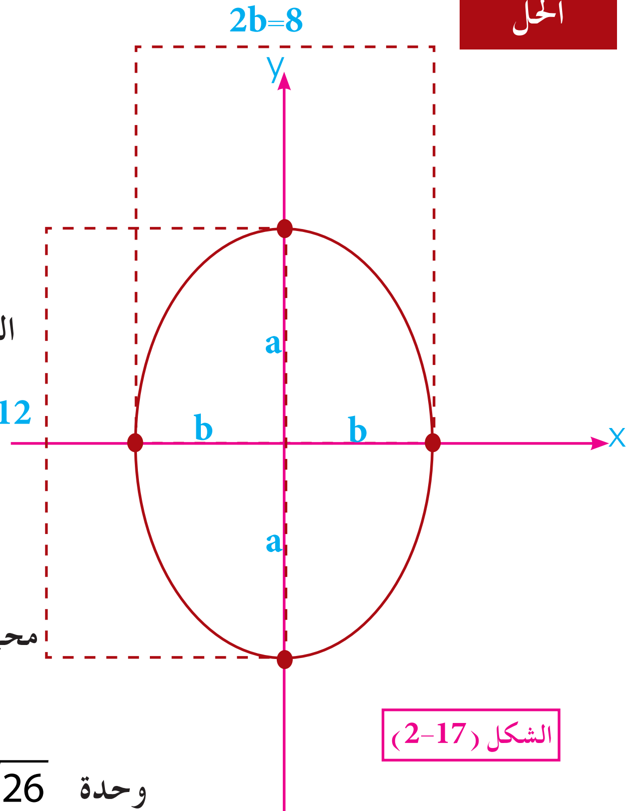
المسافة بين البؤرتين $\Rightarrow 2c=4\sqrt{5}$ وحدة

مساحة منطقة القطع الناقص $\boxed{A=ab\pi}$

$A=(6)(4)\pi=24\pi$ (وحدة مربعة)، $\pi=\frac{22}{7}$

محيط القطع الناقص $\boxed{\because P=2\pi\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}$

$P=2\pi\sqrt{\frac{36+16}{2}}=2\pi\sqrt{\frac{52}{2}}=2\pi\sqrt{26}$ وحدة



الشكل (2-17)

مثال -14- لتكن $kx^2 + 4y^2 = 36$ معادلة قطع ناقص مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه $(\sqrt{3},0)$ جد قيمة $K \in R$.

الحل

$kx^2 + 4y^2 = 36 \qquad [\div 36]$

$$\frac{x^2}{\frac{36}{k}} + \frac{y^2}{9} = 1$$

من البؤرة $(\sqrt{3},0)$

$$\Rightarrow c = \sqrt{3} \Rightarrow c^2 = 3$$

وبالمقارنة مع المعادلة القياسية $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\Rightarrow a^2 = \frac{36}{k} \quad , \quad b^2 = 9 \ , \ c^2 = 3 \ .... \ (1)$$

$c^2 = a^2 - b^2 \ ...... \ (2)$

بالتعويض عن (1) في (2)

$$3 = \frac{36}{k} - 9 \Rightarrow k = 3$$

مثال -15- جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات والمسافة بين البؤرتين (6) وحدات ، والفرق بين طولي المحورين يساوي (2) وحدة.

الحل

$2c = 6 \Rightarrow c = 3$

$2a - 2b = 2 \qquad \div 2$

$a - b = 1 \Rightarrow a = 1 + b \ ....(1)$

$\because \ c^2 = a^2 - b^2$

$\therefore \ 9 = (1+b)^2 - b^2$ بالتعويض

$9 = 1 + 2b + b^2 - b^2$

$9 = 1 + 2b$

$b = 4 \ ....(2)$

تعويض (2) في (1)

$a = 1 + 4 = 5$

$a^2 = 25$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$ معادلة القطع الناقص

مثال -16-

جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤتيه بؤرة القطع المكافئ $y^2 - 12x = 0$, وطول محوره الصغير يساوي (10) وحدات .

الحل

$y^2 - 12x = 0$

$y^2 = 12x$

$y^2 = 4px$ (بالمقارنة مع المعادلة القياسية)

$4p = 12 \Rightarrow p = 3$

بؤرتا القطع الناقص هما : $F_1(3,0)$, $F_2(-3,0)$

$\Rightarrow c = 3 \Rightarrow c^2 = 9$

$2b = 10$

$b = 5 \Rightarrow b^2 = 25$

$\because c^2 = a^2 - 25$

$\therefore 9 = a^2 - 25$

$a^2 = 34$

$$\frac{x^2}{34} + \frac{y^2}{25} = 1$$ معادلة القطع الناقص

مثال -17-

باستخدام التعريف ، جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه :

$F_1(2,0)$ ، $F_2(-2,0)$ والعدد الثابت = 6

الحل

$\forall P(x,y)$ تنتمي للقطع الناقص :

$$\Rightarrow PF_1 + PF_2 = 2a$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} + \sqrt{(x+2)^2+y^2} = 6$$

$$\sqrt{(x-2)^2+y^2} = 6 - \sqrt{(x+2)^2+y^2}$$ بتربيع الطرفين

$$(x-2)^2+y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + (x+2)^2 + y^2$$

$$x^2-4x+4+y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+2)^2+y^2} + x^2+4x+4+y^2$$

$$12\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 36+8x$$ بالقسمة على 4

$$3\sqrt{(x+2)^2+y^2} = 9+2x$$ بتربيع الطرفين

$$9\left[x^2+4x+4+y^2\right] = 81+36x+4x^2$$

$$9x^2+36x+36+9y^2 = 81+36x+4x^2$$

$$5x^2+9y^2 = 81-36$$

$$5x^2+9y^2 = 45$$

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{5} = 1$$ معادلة القطع الناقص

[2-4-4] طريقة رسم القطع الناقص Graph The Ellipse.

لتكن $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ معادلة قطع ناقص بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ولرسم هذا القطع :

1. نعين النقطتين $V_1(a,0)$ ، $V_2(-a,0)$
2. نعين النقطتين $M_1(0,b)$ ، $M_2(0,-b)$
3. نصل بين النقاط الاربعة $V_1\,M_1\,V_2\,M_2$ على الترتيب بمنحني متصل.
4. نعين البؤرتين $F_1(c,0)$ ، $F_2(-c,0)$

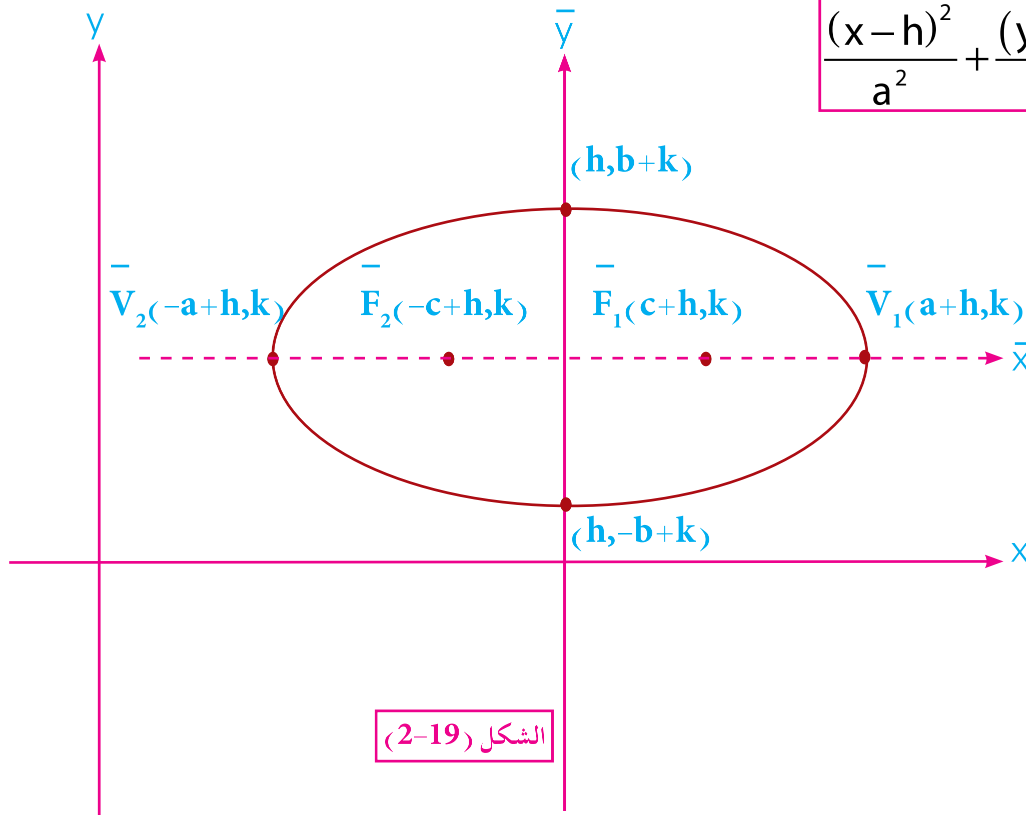
[2-5] انسحاب المحاور للقطع الناقص.

تبينا ان مركز القطع الناقص بانه نقطة تقاطع محوري تناظره ، فاذا كان المركز عند النقطة $c(h,k)$ والمحوران يوازيان المحورين الاحداثيين فاننا نحصل على معادلة القطع الناقص في الاحداثيات الجديدة كما يأتي :

[2-5-1] المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي المحور السيني ومركزه النقطة (h, k) .

عند انسحاب مركز القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل $(0,0)$ على محور السينات بمقدار h من الوحدات وبمقدار k من الوحدات على محور الصادات ، تصبح المعادلة القياسية للقطع الناقص بالصورة الاتية :

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$



الشكل (2-19)

لاحظ من الشكل $(2-19)$ ان المحور الكبير يوازي محور السينات وطوله $(2a)$ ومعادلته $y=k$ والمحور الصغير يوازي محور الصادات وطوله $(2b)$ ومعادلته $x=h$ اما البؤرتان بعد الانسحاب فتصبحان $\bar{F}_2(-c+h,k)$, $\bar{F}_1(c+h,k)$ والرأسان للقطع الناقص هما $\bar{V}_2(-a+h,k)$, $\bar{V}_1(a+h,k)$

[2-5-2] المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي محور الصادات ومركزه النقطة (h, k).

بنفس الاسلوب السابق لمعادلة القطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي محور السينات ومركزه النقطة (h,k) يمكن التعرف على المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي محوره الاكبر يوازي محور الصادات ومركزه النقطة (h,k) وهي :

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$$

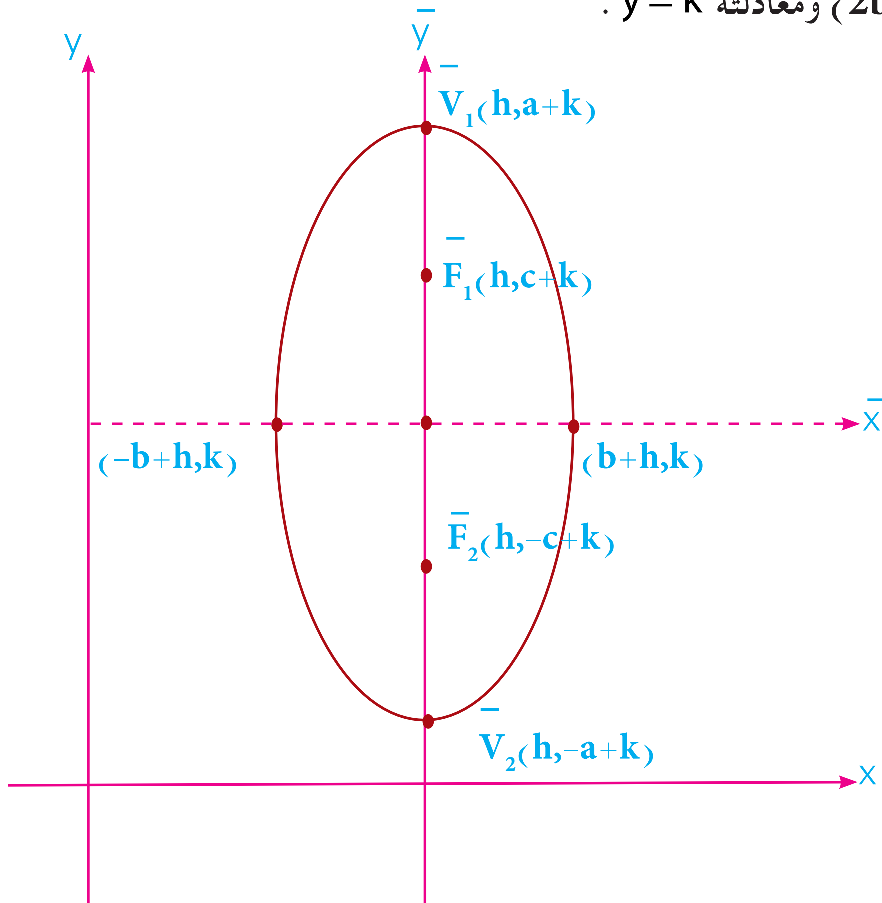
لاحظ الشكل $(2-20)$

حيث البؤرتان هما $\bar{F}_1(h,c+k)$, $\bar{F}_2(h,-c+k)$

والـرأسـان $\bar{V}_1(h,a+k)$, $\bar{V}_2(h,-a+k)$

والمحور الكبير يوازي محور الصادات وطولـه $(2a)$

ومعادلتـه $x=h$ اما المحـور الصغير فانه يـوازي محور السينات وطوله $(2b)$ ومعادلته $y=k$.



الشكل (2-20)

ملاحظة

سنقتصر في البند [5 - 2] على إيجاد مركز القطع الناقص، والبؤرتان والرأسان والقطبان، وطول المحورين ومعادلة كل من المحورين فقط.

مثال -18- جد البؤرتين والرأسين والقطبين وطول ومعادلة كل من المحورين للقطع الناقص ثم جد قيمة **e**.

$$\frac{(X-2)^2}{9}+\frac{(y-1)^2}{25}=1$$

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية للقطع الناقص.

$$\frac{(X-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$

$\Rightarrow (h,k)=(2,1)$

$\Rightarrow a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$ وحدة طول المحور الكبير

$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$ وحدة طول المحور الصغير

$c=\sqrt{a^2-b^2} \Rightarrow c=\sqrt{25-9}=\sqrt{16}=4$ القطبان $(-b+h,k)$, $(b+h,k)$

$(-1,1)$, $(5,1)$

$\overline{F_1}(h,c+k)$, $\overline{F_2}(h,-c+k)$ البؤرتان

$\overline{F_1}(2,5)$, $\overline{F_2}(2,-3)$

$\overline{V_1}(h,a+k)$, $\overline{V_2}(h,-a+k)$ الرأسان

$\overline{V_1}(2,6)$, $\overline{V_2}(2,-4)$

$\therefore x=2$ معادلة المحور الكبير

$y=1$ معادلة المحور الصغير

$e=\frac{c}{a}=\frac{4}{5}<1$ (الاختلاف المركزي)

تمارين (2-2)

1. عين كل من البؤرتين والرأسين والقطبين والمركز ثم جد طول ومعادلة كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الناقصة المبينة معادلتها في كل مما يأتي:

a) $x^2+2y^2=1$ b) $9x^2+13y^2=117$

c) $\frac{(x-4)^2}{81}+\frac{(y+1)^2}{25}=1$ d) $\frac{(x+3)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$

e) $9x^2+16y^2-72x-96y+144=0$ f) $x^2+25y^2+4x-150y+204=0$

2. جد المعادلة القياسية للقطع الناقص الذي مركزه في نقطة الاصل في كل مما يأتي ثم أرسمه:

أ. البؤرتان هما النقطتان $(5,0)$ و $(-5,0)$ وطول محوره الكبير يساوي (12) وحدة.

ب. البؤرتان هما $(\pm2,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm4$.

جـ. احدى بؤرتيه تبعد عن نهايتي محوره الكبير بالعددين 1، 5 وحدة على الترتيب.

د. الاختلاف المركزي $=\frac{1}{2}$ وطول محوره الصغير (12) وحدة طولية.

هـ. المسافة بين بؤرتيه تساوي (8) وحدات، ونصف محوره الصغير يساوي (3) وحدة.

3. باستخدام التعريف جد معادلة القطع الناقص اذا علم:

أ. بؤرتاه النقطتان $(0,\pm2)$ ورأساه النقطتان $(0,\pm3)$ ومركزه نقطة الاصل.

ب. المسافة بين البؤرتين (6) وحدة والعدد الثابت (10) والبؤرتان تقعان على محور السينات ومركزه نقطة الاصل.

4. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2+8x=0$ علماً بان القطع الناقص يمر بالنقطة $(2\sqrt{3}\ ,\ \sqrt{3})$.

5. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور السينات ويمر بالنقطتين $(6, 2)$, $(3, 4)$.

6. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه نقطتا تقاطع المنحني $x^2 + y^2 - 3x = 16$ مع محور الصادات ويمس دليل القطع المكافئ $y^2 = 12x$.

7. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان الى محور السينات ومركزه في نقطة الاصل وطول محوره الكبير ضعف طول محوره الصغير ويقطع القطع المكافئ $y^2 + 8x = 0$ عند النقطة التي احداثيها السيني يساوي (-2) .

8. قطع ناقص معادلته $hx^2 + ky^2 = 36$ ومركزه نقطة الاصل ومجموع مربعي طولي محوريه يساوي (60) ، واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 4\sqrt{3}x$ ما قيمة كل من $h, k \in R$؟

9. جد معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ $x^2 = 24y$ ومجموع طولي محوريه (36) وحدة.

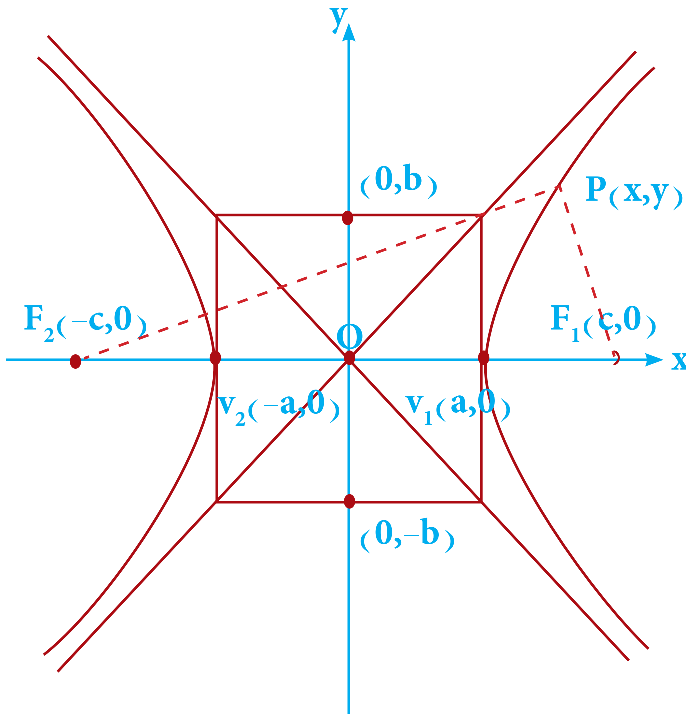
10. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتيه $F_1(4,0)$ ، $F_2(-4,0)$ والنقطة Q تنتمي للقطع الناقص بحيث ان محيط المثلث QF_1F_2 يساوي (24) وحدة.

[2-6] القطع الزائد Hyperbola .

Definition **تعريف [2-6]**

القطع الزائد هو مجموعة النقط في المستوي التي تكون القيمة المطلقة لفرق بعدي اي منها عن نقطتين ثابتتين (البؤرتان) يساوي عدداً ثابتاً .

كما في الشكل (22 - 2)



الشكل (22-2)

البؤرتان هما $F_2(-c,0)$, $F_1(c,0)$

الرأسان هما $V_2(-a,0)$, $V_1(a,0)$

والنقطة $P(x,y)$ نقطة من نقاط منحنى القطع الزائد ومن التعريف [6 - 2]

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

حيث 2a عدداً ثابتاً يمثل طول المحور الحقيقي للقطع الزائد الذي تقع عليه البؤرتين والرأسين وكل من pF_1 , pF_2 يسميان طولي نصفي القطرين البؤريين المرسومين من نقطة (p) والمسافة $F_1 F_2$ هي البعد بين البؤرتين وتساوي 2c وطول المحور المرافق او التخيلي هو (2b) (وهو المحور العمودي على المحور الحقيقي والمار بمركز القطع) .

[2-6-1] معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الاصل .

من الشكل (2 – 22) وتبعاً لتعريف القطع الزائد :

$$|PF_1 - PF_2| = 2a$$

$$\Rightarrow PF_1 - PF_2 = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a$$

$$\Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

وبتربيع الطرفين والتبسيط كما مر في معادلة القطع الناقص الذي مركزه نقطة الاصل والبؤرتان على محور السينات نحصل على المعادلة :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1}$$

من الشكل (2 – 22) فان : $c > 0 \, , \, a > 0 \, , \, c > a$

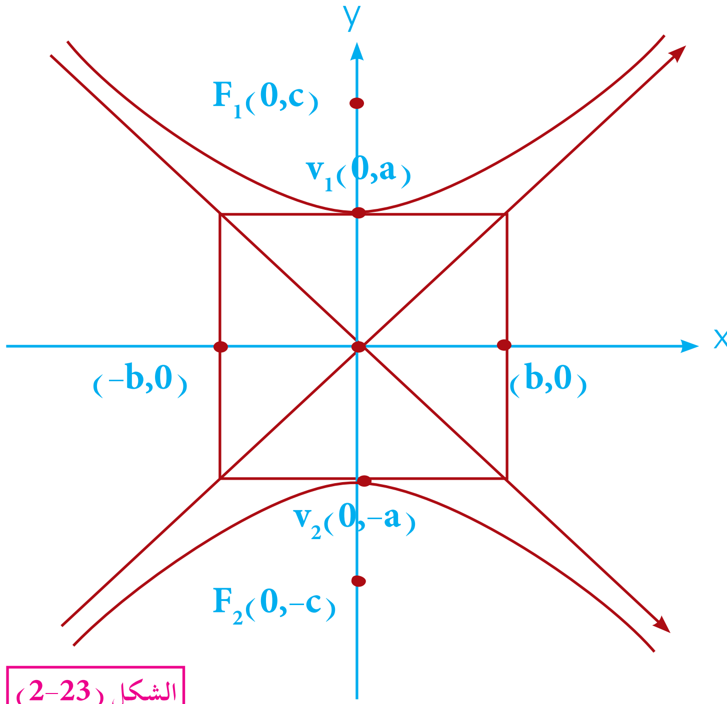
$c^2 - a^2 > 0$

وبفرض ان $b^2 = c^2 - a^2$

وبتعويض عن $a^2 - c^2 = -b^2$ في المعادلة القياسية السابقة نحصل على :

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

[2-6-2] معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه على محور الصادات ومركزه نقطة الاصل .



الشكل (2-23)

اذا كانت البؤرتان على محور الصادات ومحورالسينات هو العمود على $\overline{F_1 F_2}$ من نقطة الاصل كما في الشكل (2 - 23) وبنفس الطريقة السابقة نجد المعادلة القياسية للقطع الزائد .

وهي: $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$

ملاحظة

الاختلاف المركزي e للقطع الزائد يكون أكبر من واحد أي

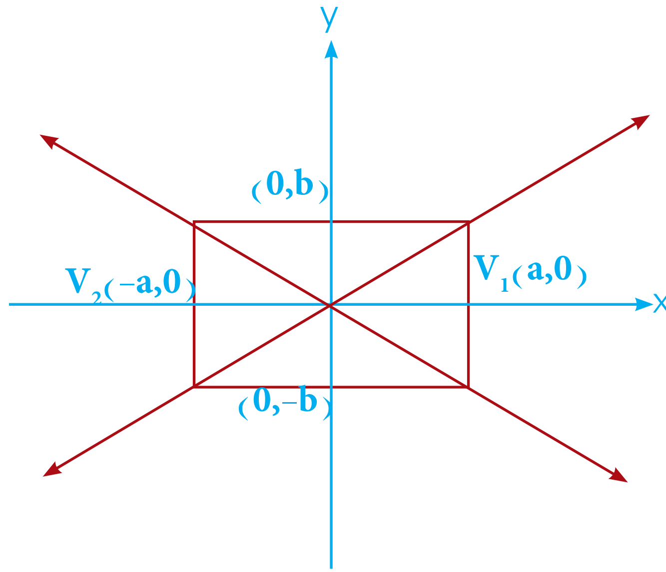
$$e = \frac{c}{a} > 1$$

[2-6-3] طريقة رسم القطع الزائد Graph The Hyperbola .

لتكن $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ معادلة قطع زائد بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ولرسم هذا القطع :

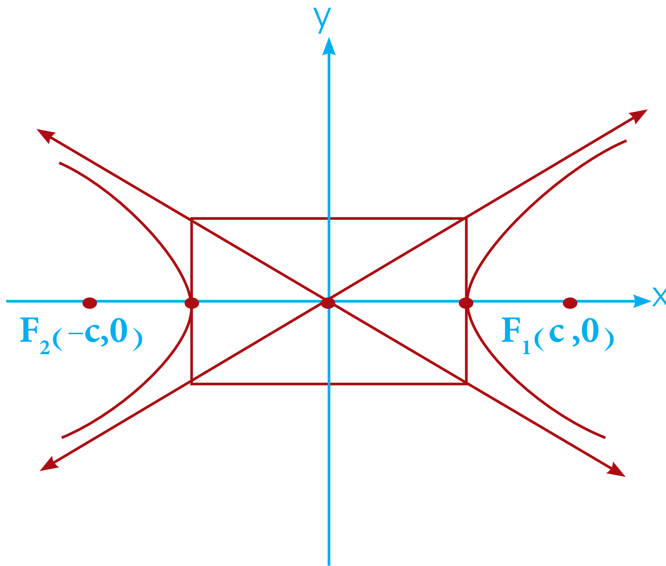
1. نعين النقطتين $(a , 0)$, $(-a , 0)$.
2. نعين النقطتين $(0 , b)$, $(0 , -b)$.
3. نكون مستطيلاً من هذه النقط أضلاعه تـوازي المحورين كمـا في الشكـل (2 - 24) .

4. نرسم قطري المستطيل كما في الشكل (24 – 2) فهما يمثلان المستقيمين المحاذيين لمنحني القطع الزائد .



الشكل (2-24)

5. نعين البؤرتين $F_2(-c,0)$ ، $F_1(c,0)$ ثم نرسم ذراعي القطع الزائد كما في الشكل (25 – 2) .



الشكل (2-25)

مثال -19-

عين البؤرتين والرأسين وطول كل من المحورين الحقيقي والمرافق للقطع الزائد ثم أرسمه.

$$\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$$

الحل

بالمقارنة مع المعادلة القياسية

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

طول المحور الحقيقي $\Rightarrow a^2=64 \Rightarrow a=8 \Rightarrow 2a=16$ وحدة

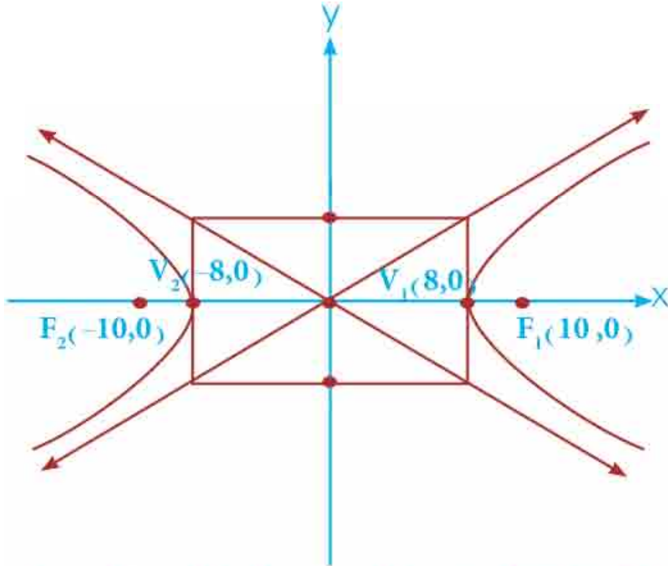
طول المحور المرافق $\Rightarrow b^2=36 \Rightarrow b=6 \Rightarrow 2b=12$ وحدة

$$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=64+36$$

$$\Rightarrow c^2=100 \Rightarrow c=10$$

رأسا القطع الزائد هما $V_1(8,0)$, $V_2(-8,0)$

والبؤرتان هما $F_1(10,0)$, $F_2(-10,0)$



الشكل (2-26)

مثال -20-

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره الحقيقي = 6 وحدات والاختلاف المركزي يساوي (2) والبؤرتان على محور السينات.

الحل

$$2a=6 \Rightarrow a=3 \Rightarrow a^2=9$$

$$\therefore e=\frac{c}{a} \Rightarrow 2=\frac{c}{3} \Rightarrow c=6$$

$$\therefore c^2=a^2+b^2 \Rightarrow 36=9+b^2$$

$$\Rightarrow b^2=36-9 \Rightarrow b^2=27$$

$$\therefore \frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$$ معادلة القطع الزائد القياسية

مثال -21-

جد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وطول محوره المرافق 4 وحدات وبؤرتاه هما النقطتان : $F_1(0,\sqrt{8})$, $F_2(0,-\sqrt{8})$

الحل

بما ان البؤرتين على محور الصادات فمعادلته القياسية $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

$$2b=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow b^2=4$$

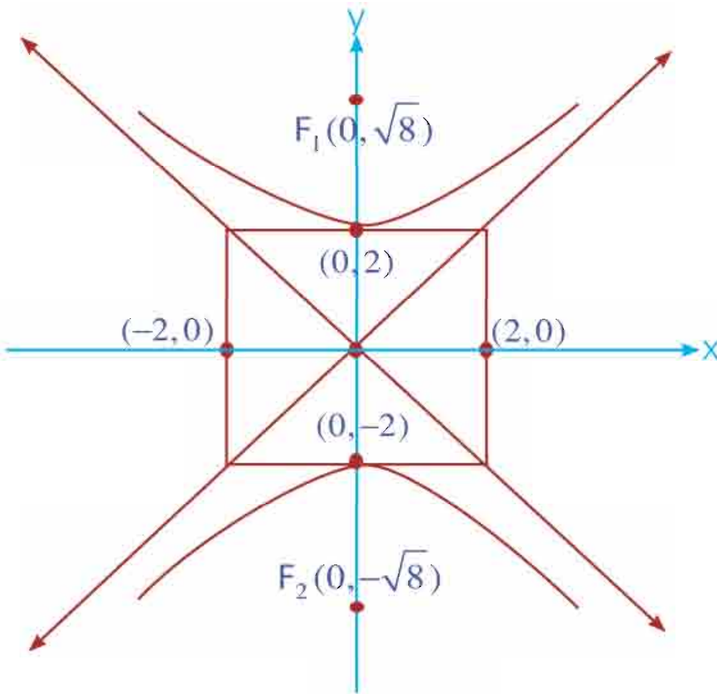
$$c=\sqrt{8} \Rightarrow c^2=8$$

$$c^2=a^2+b^2$$

$$\therefore 8=a^2+4$$

$$a^2=4$$

$$\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$$



الشكل (2-27)

في هذا المثال طول المحور الحقيقي مساوٍ الى طول المحور المرافق مثل هذا النوع من القطوع الزائدة يدعى بالقطع الزائد القائم او (المتساوي الاضلاع) لان النقاط الاربع تشكل رؤوس مربع وفيه يكون الاختلاف المركزي (e) مقدار ثابت قيمته $(\sqrt{2})$.

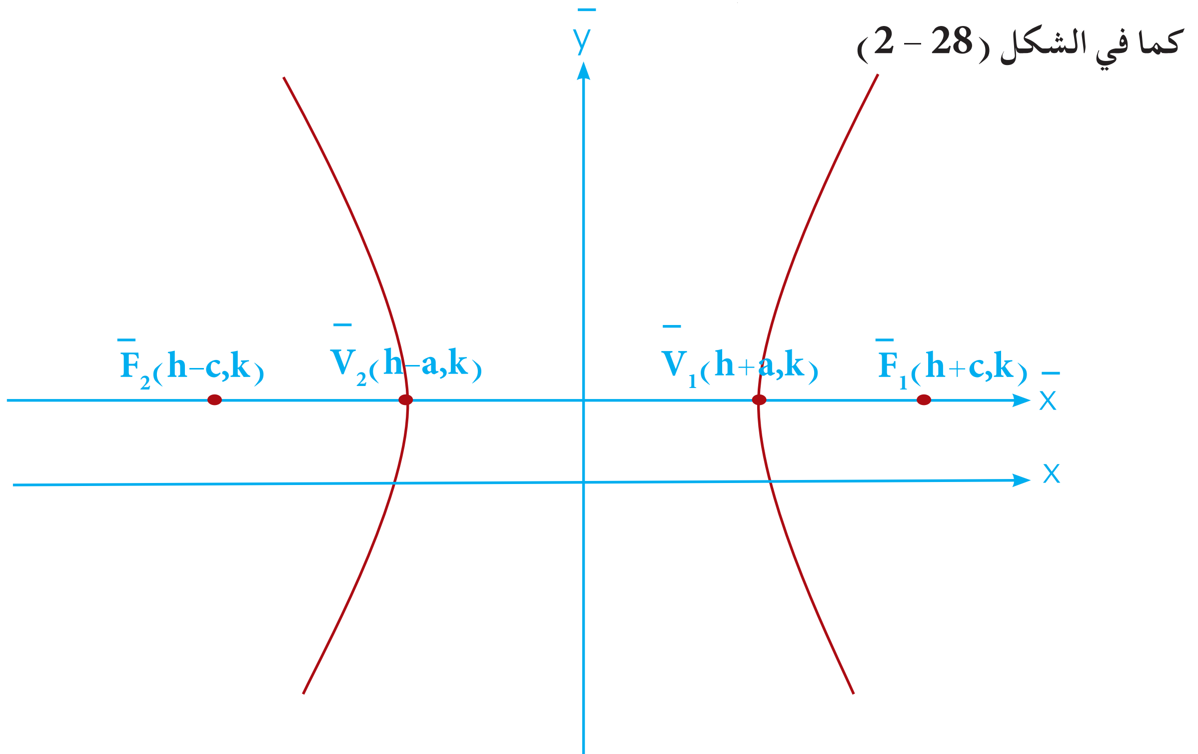
[2-7] انسحاب محاور القطع الزائد :

معادلة القطع الزائد الذي مركزه النقطة (h,k) ومحوراه يوازيان المحورين المتعامدين.

اولاً: عند انسحاب مركز القطع الزائد بمقدار (h) من الوحدات على محور السينات وبمقدار (k) من الوحدات على محور الصادات والمحور الحقيقي يوازي محور السينات تصبح المعادلة.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

كما في الشكل (2 - 28)



الشكل (2-28)

حيث المحور الحقيقي يوازي محور السينات

والبؤرتان هما $\bar{F}_1(c+h,k)$, $\bar{F}_2(-c+h,k)$

والرأسان هما $\bar{V}_1(a+h,k)$, $\bar{V}_2(-a+h,k)$

ثانياً : يمكن الحصول على معادلة القطع الزائد الذي محوره الحقيقي يوازي محور الصادات ومركزه نقطة (h,k) .

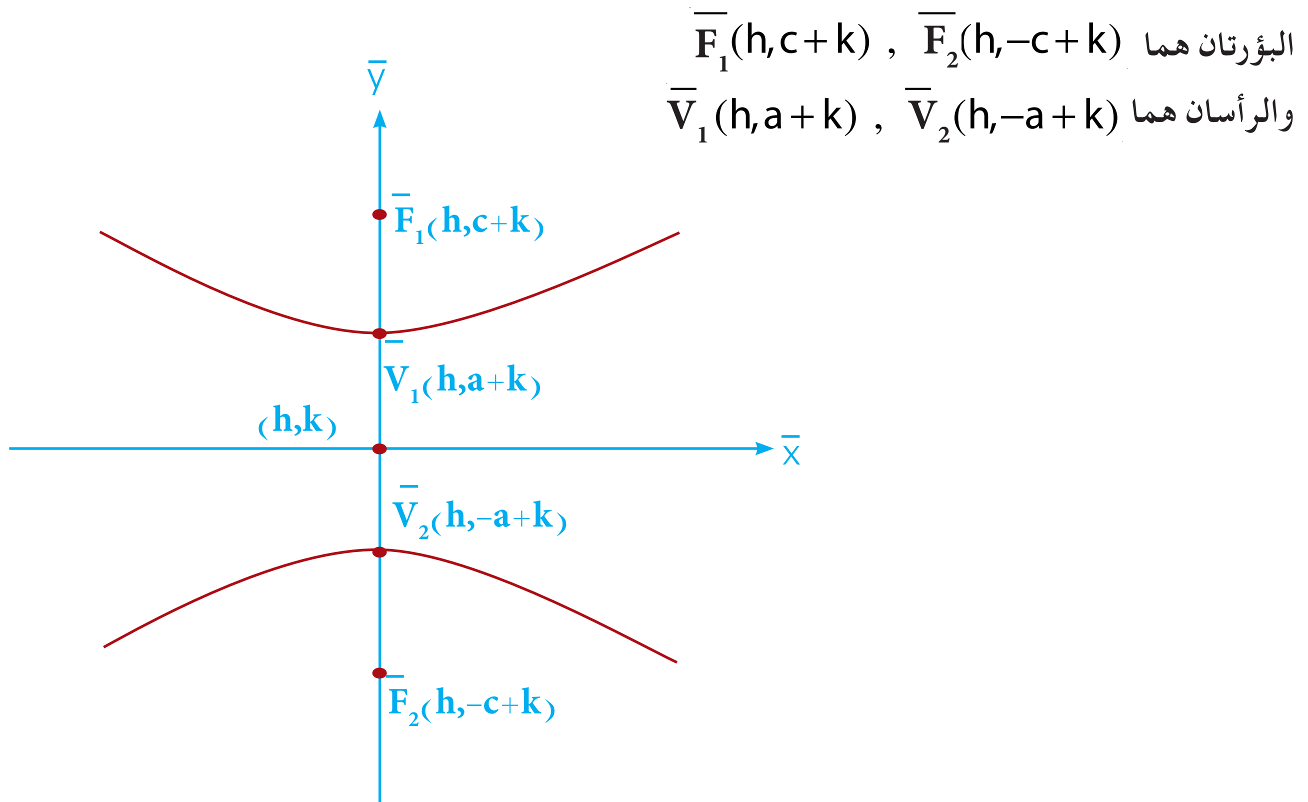
في هذه الحالة تكون المعادلة للقطع الزائد هي :

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

وكما في الشكل $(2-29)$

البؤرتان هما $\bar{F}_1(h,c+k)$, $\bar{F}_2(h,-c+k)$

والرأسان هما $\bar{V}_1(h,a+k)$, $\bar{V}_2(h,-a+k)$



الشكل $(2-29)$

ملاحظة سنقتصر في البند [7 - 2] على ايجاد مركز القطع الزائد وبؤرتاه ورأساه وطول المحورين.

مثال -22-

جد احداثيا المركز والبؤرتين والرأسين وطول المحورين والاختلاف المركزي للقطع الزائد الذي معادلته :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

الحل

بمقارنة هذه المعادلة :

$$\frac{(x+2)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{4}=1$$

بالمعادلة القياسية

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

نجد :

طول المحور الحقيقي $\Rightarrow a^2=9 \Rightarrow a=3 \Rightarrow 2a=6$ وحدة

طول المحور المرافق $\Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=2 \Rightarrow 2b=4$ وحدة

$\Rightarrow h=-2 \ , \ k=1$

المركز $\therefore (h,k)=(-2,1)$

$c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=9+4=13 \Rightarrow c=\sqrt{13}$

لان المحور الحقيقي يوازي محور السينات $\therefore \overline{F}_1(c+h,k) \ , \ \overline{F}_2(-c+h,k)$

البؤرتان $\Rightarrow \overline{F}_1(\sqrt{13}-2,1) \ , \ \overline{F}_2(-\sqrt{13}-2,1)$

$\overline{V}_1(a+h,k) \ , \ \overline{V}_2(-a+h,k)$

الرأسان $\overline{V}_1(1,1) \ , \ \overline{V}_2(-5,1)$

(الاختلاف المركزي) $\therefore e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{13}}{3} > 1$

تمارين (3-2)

1. عين كل من البؤرتين والرأسين ثم جد طول كل من المحورين والاختلاف المركزي للقطوع الزائدة الاتية :

a) $12x^2-4y^2=48$ b) $16x^2-9y^2=144$

c) $2(y+1)^2-4(x-1)^2=8$ d) $16x^2+160x-9y^2+18y=185$

2. اكتب معادلة القطع الزائد في الحالات الاتية ثم ارسم القطع :

أ. البؤرتان هما النقطتان $(\pm5,0)$ ويتقاطع مع محور السينات عند $x=\pm3$ ومركزه نقطة الاصل.

ب. طول محوره الحقيقي (12) وحدة وطول محوره المرافق (10) وحدات وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين ومركزه نقطة الاصل.

جـ. مركزه نقطة الاصل وبؤرتاه على محور الصادات وطول محوره المرافق $2\sqrt{2}$ وحدة واختلافه المركزي يساوي (3).

3. جد باستخدام تعريف معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل وبؤرتيه $(2\sqrt{2},0)$, $(-2\sqrt{2},0)$ وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين والقيمة المطلقة للفرق بين بعدي اية نقطة عن بؤرتيه يساوي (4) وحدات.

4. قطع زائد طول محوره الحقيقي (6) وحدات واحدى بؤرتيه هي بؤرة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل ويمر بالنقطتين $(1,2\sqrt{5})$, $(1,-2\sqrt{5})$. جد معادلتي القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الاصل والقطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل .

5. قطع زائد مركزه نقطة الاصل ومعادلته $hx^2-ky^2=90$ وطول محوره الحقيقي $(6\sqrt{2})$ وحدة وبؤرتاه تنطبقان على بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته $9x^2+16y^2=576$ جد قيمة كل من h, k التي تنتمي الى مجموعة الاعداد الحقيقية.

6. اكتب معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل اذا علمت ان احد راسيه يبعد عن البؤرتين بالعددين $1, 9$ وحدات على الترتيب وينطبق محوراه على المحورين الاحداثيين.

7. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه هما بؤرتا القطع الزائد الذي معادلته $x^2-3y^2=12$ والنسبة بين طولي محوريه $=\frac{5}{3}$ ومركزه نقطة الاصل .

8. النقطة $p(6,L)$ تنتمي الى القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل ومعادلته $x^2-3y^2=12$ جد كلاً من :

أ. قيمة L . ب. طول نصف القطر البؤري للقطع المرسوم في الجهة اليمنى من النقطة P.

9. جد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه هما بؤرتي القطع الناقص $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$ ويمس دليل القطع المكافئ $x^2+12y=0$.

3

الفصل الثالث

Chapter Three

تطبيقات التفاضل

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
المشتقات العليا	$y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = f^{(n)}(x)$
التغير التقريبي عند a	$hf'(a), \ h = b - a$

تطبيقات التفاضل

تمهيد : لقد سبق أن تعلمت في الصف الخامس العلمي متى تكون الدالة قابلة للاشتقاق وتعرفت على قواعد ايجاد مشتقات الدوال الجبرية والدائرية والتفسير الهندسي والفيزيائي للمشتقة وفي هذا الفصل سنتناول بعض المفاهيم الاخرى وبعض استعمالات وتطبيقات حساب التفاضل

[3-1] المشتقات ذات الرتب العليا (Higher- Order Dedrivatives)

إذا كانت $y = f(x)$ دالة تتوافر فيها شروط الاشتقاق فان مشتقتها الأولى (**First Derivative**)

هي $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ وتمثل دالة جديدة

والدالة الجديدة هذه إذا توافرت فيها شروط الاشتقاق أيضاً فإن مشتقها دالة جديدة تمثل المشتقة الثانية (**Second Derivative**) ويرمز لها بالرمز $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$ وهذه الاخيرة ايضاً دالة جديدة في المتغير x

وإذا توافرت فيها شروط الاشتقاق فإن مشتقتها تسمى المشتقة الثالثة

(**Third Derivative**) : ويرمز لها $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = f'''(x)$

وعلى هذا المنوال يمكن ايجاد مشتقات متتالية وبدءاً من المشتقة الثانية يطلق على هذه المشتقات بالمشتقات العليا (**Higher Derivatives**) وتكتب المشتقة من الرتبة **n** كما يأتي :

$y^{(n)} = \frac{d^ny}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ حيث **n** عدد صحيح موجب .

ولنتعرف على رموز مختلفة للمشتقات المتتالية وكما يأتي :

$f'(x), f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x),\ldots,f^{(n)}(x)$

$y', y'', y''', y^{(4)},\ldots, y^{(n)}$

$\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, \frac{d^4y}{dx^4},\ldots,\frac{d^ny}{dx^n}$

ومن تعريف المشتقات العليا يتضح لنا أن :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)$$

وأن :

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right),\ldots\ldots$$

وكمثال للمشتقات المتتالية نأخذ الدالة الاتية : **s=f(t)** حيث **s** تمثل إزاحة جسم متحرك عند أي زمن **t**،
فالمشتقة الأولى $\frac{ds}{dt} = f'(t)$ تمثل السرعة اللحظية لذلك الجسم، والمشتقة الثانية $\frac{d^2s}{dt^2} = f''(t)$

تمثل معدل تغير السرعة أي التعجيل (**Acceleration**) للجسم المتحرك.

أما المشتقة الثالثة للإزاحة بالنسبة للزمن **t**، $\frac{d^3s}{dt^3} = f'''(t)$ فتمثل المعدل اللحظي لتغير التعجيل

ومن الأمثلة الفيزيائية الأُخرى، حساب درجة الأمان في نظام فرامل سيارة ما يتوقف على أقصى تباطؤ (**Deceleration**) يمكن أن تحدثه الفرامل (وهو تعجيل سالب).

وعند اطلاق صاروخ للفضاء فإن رائد الفضاء الذي في المركبة داخل الصاروخ يتعرض لتأثيرات صحية وهذه التأثيرات تعتمد على التعجيل الذي يتعرض له هذا الرائد .

وتستعمل المشتقة الثالثة لدراسة ما يتعرض له راكب قطارات الأنفاق.

مثال-1-

إذا كانت $y= \cos 2x$ فجد $\frac{d^4y}{dx^4}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = -2\sin 2x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -(2)^2 \cos 2x$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2^3 \sin 2x$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} = 2^4 \cos 2x$$

مثال-2-

إذا علمت بأن $y^2+x^2=1$ فبرهن على أن : $y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} = 0$

الحل

نشتق العلاقة المعطاة اشتقاقاً ضمنياً ،أي نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x

ومن قسمة طرفي المعادلة على 2 نحصل على: $2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$

$$y\frac{dy}{dx} + x = 0$$

ثم نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير x

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}.\frac{dy}{dx} + 1 = 0$$

$$y\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + 0 = 0$$

$$y\frac{d^3y}{dx^3} + 3\frac{d^2y}{dx^2}.\frac{dy}{dx} = 0$$

وبهذا يتم المطلوب

تمارين (1 - 3)

1. جد $\frac{d^2y}{dx^2}$ لكل مما يلي:

a) $y=\sqrt{2-x}, \forall x<2$

b) $y=\frac{2-x}{2+x}, x\neq -2$

c) $2xy-4y+5=0, y\neq 0, x\neq 2$

2. جد $f'''(1)$ لكل مما يأتي:

a) $f(x)=4\sqrt{6-2x}, \forall x<3$

b) $f(x)=\sin \pi x$

c) $f(x)=\frac{3}{2-x}, x\neq 2$

3. إذا كانت $y=\tan x$, فبرهن أن $\frac{d^2y}{dx^2}=2y\left(1+y^2\right)$ حيث $x\neq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \forall n\in Z$,

4. إذا كانت $y=x\sin x$ فبرهن أن $y^{(4)}-y+4\cos x=0$

[3-2] المعدلات المرتبطة Related Rates

إذا وجد أكثر من متغير بحيث تتوقف قيمة كل من هذه المتغيرات على متغير واحد يسمى (بارامتر) ومثالهُ الزمن فتتغير كل المتغيرات تبعاً لتغيره وحيث أن العلاقة هي ارتباط فإننا نسمي المعدلات الزمنية هذه بالمعدلات الزمنية المرتبطة واحياناً بالمعدلات المرتبطة أو المعدلات الزمنية فقط، فمثلاً اذا كان

$y = g(t), x = f(t)$

فالمتغيران x,y متغيرين تابعين كل منهما مرتبط بالمتغير المستقل t، فمن الممكن ربط المتغيرين ببعضهما، ويمكن أن نجد معدل تغير كل منهما وكما يأتي: $\frac{dx}{dt} = f'(t), \frac{dy}{dt} = g'(t)$ والناتجان يمثلان المعدلين الزمنيين لتغير كل من y,x

وقد يتوافر الربط بين المتغيرين في مسألة ما بمعادلة وفي هذه الحالة نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t فعلى سبيل المثال من المعادلة $x^2+y^2-4y+6x=0$ يمكن ايجاد المعدل الزمني لتغير كل من x,y وكما يلي:

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2 - 4y + 6x) = \frac{d}{dt}(0) \Rightarrow$$

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} - 4\frac{dy}{dt} + 6\frac{dx}{dt} = 0$$

فيكون : المعدل الزمني لتغير y يساوي $\frac{dy}{dt}$

والمعدل الزمني لتغير x يساوي $\frac{dx}{dt}$

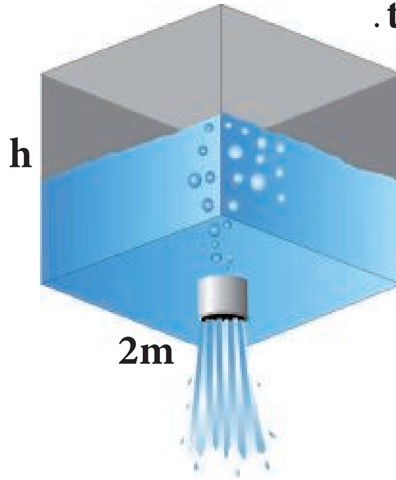
ملاحظة لحل أي سؤال يتعلق بالمعدلات المرتبطة حاول إتباع ما يلي إن أمكن:

1) ارسم مخططاً للمسألة (أن احتجت الى ذلك) وحدد المتغيرات والثوابت وضع لها الرموز وحدد العلاقة الرئيسية في حل السؤال.
2) حاول إيجاد علاقة أخرى بين المتغيرات لكي تقلل من عدد المتغيرات.
3) نشتق الطرفين بالنسبة للمتغير (الزمن) t.
4) عوض معطيات السؤال من المتغيرات بعد الاشتقاق.

والامثلة التالية توضح ذلك:

مثال-1-

خزان مملوء بالماء على شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة طول ضلعها $2m$ يتسرب منه الماء بمعدل $0.4m^3/h$ جد معدل تغير انخفاض الماء في الخزان عند أي زمن t.



الحل

ليكن حجم الماء في الخزان عند أي زمن t هو $v(t)$

(تسرب) $\Leftarrow \frac{dv}{dt}=-0.4$ (الاشارة السالبة تعني نقصان)

وليكن ارتفاع الماء في الخزان عند أي زمن هو h والمطلوب إيجاد $\frac{dh}{dt}$

أن الماء يأخذ شكل متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة

$\therefore V = Ah \quad , \quad A =$ مساحة القاعدة

$V=(2)(2)h \Rightarrow V=4h$

$$\Rightarrow \frac{dv}{dt}=4\frac{dh}{dt}$$

$$-0.4=4\frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt}=-0.1\ m/h$$

معدل تغير انخفاض الماء في الخزان $0.1m/h$

مثال -2-

صفيحة مستطيلة من المعدن مساحتها تساوي $96cm^2$. يتمدد طولها بمعدل $2cm/s$ بحيث تبقى مساحتها ثابتة، جد معدل النقصان في عرضها وذلك عندما يكون عرضها $8cm$.

الحل

في أية لحظة ما نفرض طول المستطيل $= x$

وعرض المستطيل $= y$

معدل تغير الطول $\frac{dx}{dt} = 2cm/s$

$\frac{dy}{dt}=?$ معدل تغير العرض

$$A = xy$$

$$\therefore \quad 96 = xy.$$

$$\because \quad y = 8 \Rightarrow x = 12$$

نشتق طرفي العلاقة بالنسبة الى t

$$\frac{d}{dt}(96) = \frac{d}{dt}(xy)$$

$$0 = x.\frac{dy}{dt} + y.\frac{dx}{dt}$$

$$0 = 12\frac{dy}{dt} + 8(2)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-16}{12} = \frac{-4}{3} \text{ cm/s}$$

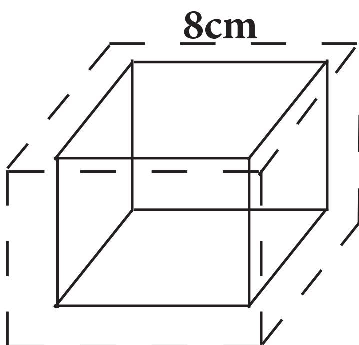
∴ العرض يتناقص بمعدل $\frac{4}{3}$ cm/s في تلك اللحظة

مثال -3- مكعب صلد طول حرفه **8cm** مغطى بطبقة من الجليد بحيث شكله يبقى مكعباً، فإذا بدأ الجليد بالذوبان بمعدل **$6cm^3/s$** فجد معدل النقصان بسمك الجليد في اللحظة التي يكون فيها هذا السمك **1cm**.

الحل

نفرض سمك الجليد في أية لحظة = x والمطلوب حساب $\frac{dx}{dt}$ عندما $x=1$

حجم الجليد = حجم المكعب المغطى بالجليد - حجم المكعب الأصلي



$$V = (8+2x)^3 - 8^3$$

$$\frac{dv}{dt} = 3(8+2x)^2\,(2)\frac{dx}{dt} - 0$$

وبالتعويض عن القيم المعطاة نحصل على:

$$-6 = 3(8+(2)(1))^2 .2\frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dx}{dt} = -0.01 \text{ cm/s}$$

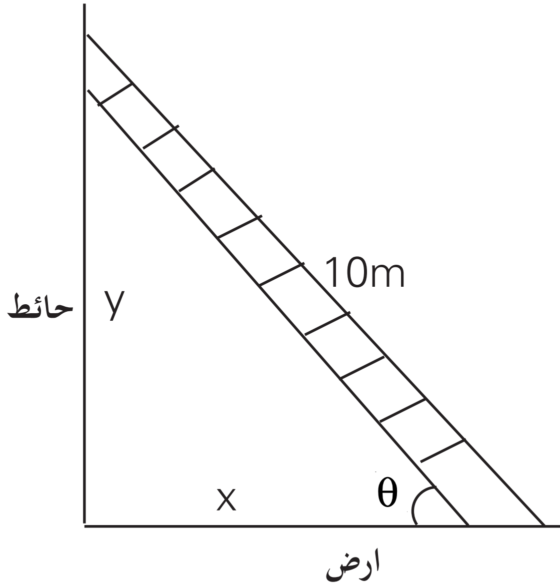
∴ معدل نقصان سمك الجليد = **0.01cm/s**

مثال – 4 –

سلم طوله **10m** يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه العلوي على حائط رأسي ، فإذا انزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل **2m / s** عندما يكون الطرف الأسفل على بعد **8m** عن الحائط جد :

1) معدل انزلاق الطرف العلوي .

2) سرعة تغير الزاوية بين السلم والأرض .



الحل

نفرض عند أية لحظة :

بعد الطرف الاسفل عن الحائط= x , $\frac{dx}{dt}=2$

بعد الطرف الأعلى عن الأرض =y .

قياس الزاوية بين السلم والأرض = θ (نصف قطرية)

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس نحصل على :

1) $x^2+y^2=100$

$$\because \quad x=8 \Rightarrow y=6$$

$$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=\frac{d}{dt}(100) \Rightarrow 2x\frac{dx}{dt}+2y\frac{dy}{dt}=0$$

وبالتعويض عن القيم المعلومة نحصل على :

$$(2)(8)(2)+(2)(6)\frac{dy}{dt}=0 \Rightarrow \frac{dy}{dt}=\frac{-8}{3}\ m/s$$

معدل انزلاق الطرف العلوي $\frac{8}{3}\ m/s$

2) $\sin\theta = \frac{y}{10} \Rightarrow \frac{d}{dt}(\sin\theta) = \frac{d}{dt}\left(\frac{y}{10}\right) \Rightarrow \cos\theta \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$

وبالتعويض عن $\cos\theta = \frac{x}{10}$ ينتج $\frac{x}{10}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{10}\frac{dy}{dt}$

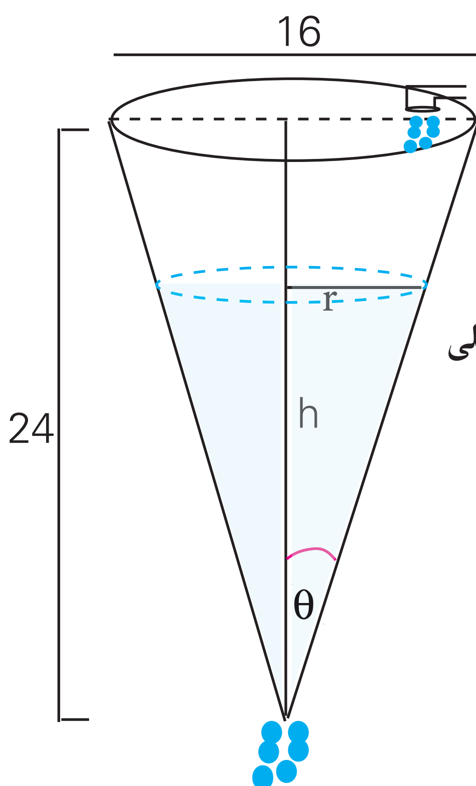
ومن التعويض بقيمة $x=8$ وعن قيمة $\frac{dy}{dt} = \frac{-8}{3}$ نحصل على :

$$\frac{8}{10}\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{1}{10}\right)\left(\frac{-8}{3}\right)$$

$$\therefore \frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{3}\ \text{rad/s}$$ سرعة تغير الزاوية

مثال -5-

مرشح مخروطي قاعدته اُفقية ورأسه للأسفل، ارتفاعه يساوي **24cm** وطول قطر قاعدته **16cm** يصب فيه سائل بمعدل $5cm^3/s$ بينما يتسرب منه السائل $1cm^3/s$ ، جد معدل تغير عمق السائل في اللحظة التي يكون فيها عمق السائل **12cm** .



الحل

نفرض بعدي المخروط المائي

(نصف القطر=**r** والارتفاع= **h**) عند أية لحظة

نفرض حجم السائل عند أية لحظة $v(t)$

في الشكل المجاور من استعمال $\tan\theta$ أو من تشابه مثلثين نحصل على

$$\tan\theta = \frac{r}{h} = \frac{8}{24} \Rightarrow r = \frac{1}{3}h$$

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 h \Rightarrow$$

$$v = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{3}h\right)^2 h = \frac{1}{27}\pi h^3$$ نشتق الطرفين بالنسبة للزمن t

$$\frac{dv}{dt}=\frac{1}{9}\pi h^2\frac{dh}{dt}....(1)$$

معدل تغير حجم السائل في المخروط =معدل الصب –معدل التسرب .

$$\frac{dv}{dt}=5-1=4\ cm^3/s$$

وبالتعويض في (1) ينتج

$$4=\frac{1}{9}\pi(12)^2\frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{4\pi}cm/s$$

مثال –6–

لتكن M نقطة متحركة على منحني القطع المكافئ $y^2=4x$ بحيث يكون معدل ابتعادها عن النقطة(7,0) يساوي $0.2unit/s$ ، جد المعدل الزمني لتغير الاحداثي السيني للنقطة M عندما يكون $x=4$.

الحل

لتكن $M(x,y)$ ولتكن $N(7,0)$ ولتكن المسافة MN تساوي S

$$S=\sqrt{(x-7)^2+(y-0)^2}\Rightarrow S=\sqrt{x^2-14x+49+y^2}$$

وبالتعويض عن $y^2=4x$ ينتج

$$\Rightarrow S=\sqrt{x^2-10x+49}$$

$$\frac{ds}{dt}=\frac{2x-10}{2\sqrt{x^2-10x+49}}.\frac{dx}{dt}\quad\Rightarrow\quad 0.2=\frac{8-10}{10}.\frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow\frac{dx}{dt}=-1unit/s$$

تمارين (3 - 2)

1. سلم يستند طرفه الأسفل على أرض أفقية وطرفه الأعلى على حائط رأسي فاذا أنزلق الطرف الأسفل مبتعداً عن الحائط بمعدل $2m / s$ ، فجد معدل انزلاق الطرف العلوي عندما يكون قياس الزاوية بين السلم والأرض تساوي $\frac{\pi}{3}$.

2. عمود طوله $7.2m$ في نهايته مصباح، يتحرك رجل طوله $1.8m$ مبتعداً عن العمود وبسرعة $30m / min$ ، جد معدل تغير طول ظل الرجل.

3. لتكن M نقطة تتحرك على القطع المكافئ $y=x^2$، جد احداثيي النقطة M عندما يكون المعدل الزمني لأبتعادها عن النقطة $(0, \frac{3}{2})$ يساوي ثلثي المعدل الزمني لتغير الاحداثي الصادي للنقطة M.

4. جد النقط التي تنتمي للدائرة $x^2 + y^2 + 4x - 8y = 108$ والتي عندها يكون المعدل الزمني لتغير x يساوي المعدل الزمني لتغير y بالنسبة للزمن t .

5. متوازي سطوح مستطيلة أبعاده تتغير بحيث تبقى قاعدته مربعة الشكل، يزداد طول ضلع القاعدة بمعدل $0.3cm / s$، وارتفاعه يتناقص بمعدل $0.5cm / s$، جد معدل تغير الحجم عندما يكون طول ضلع القاعدة $4cm$ والارتفاع $3cm$.

[3-3] مبرهنتا رول والقيمة المتوسطة Rolles and Mean Value Theorems

قبل أن نتعرف في هذا البند الى مبرهنتي رول والقيمة المتوسطة نذكر بعض التعاريف والمبرهنة التي تمهد لهاتين المبرهنتين : (للاطلاع)

تعريف [3-1]

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ فإن :

1) f تأخذ قيمة عظمى عند c حيث $c \in [a,b]$ اذا وفقط اذا

$f(c) \geq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

2) f تأخذ قيمة صغرى عند c حيث $c \in [a,b]$ اذا وفقط اذا

$f(c) \leq f(x)$ لكل $x \in [a,b]$

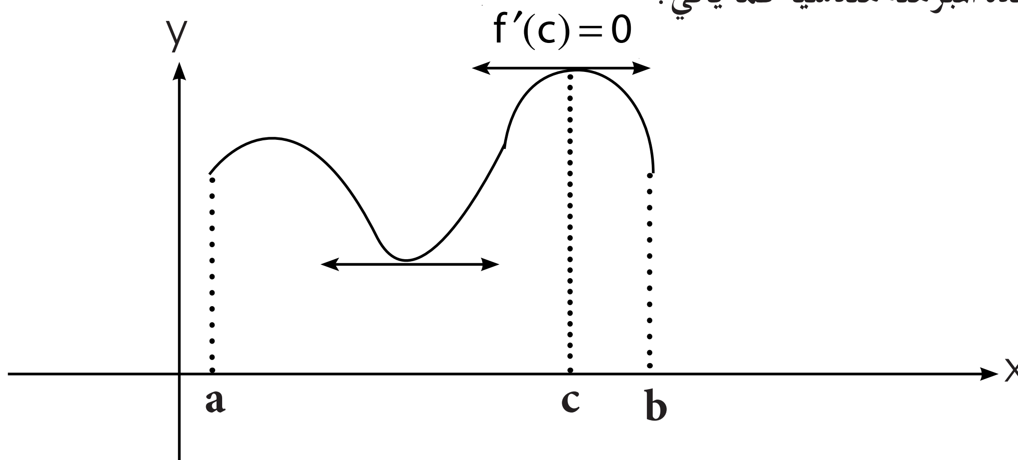
مبرهنة (3-1)

إذا كانت f دالة معرفة على الفترة المغلقة $[a,b]$ وكان :

للدالة f قيمة عظمى أو صغرى عند c حيث $c \in (a,b)$ وأن $f'(c)$ موجودة

فان $f'(c) = 0$

وسنكتفي بتوضيح هذه المبرهنة هندسياً كما يأتي :



عند النقطة c المختلفة عن a,b والتي تأخذ عندها الدالة قيمة عظمى أو صغرى يكون المماس للمنحني البياني للدالة افقياً (اي موازي لمحور السينات)

والان يمكن أن تفكر في اجابة للسؤال الاتي:

اذا كان للدالة f قيمة عظمى أو قيمة صغرى عند c حيث $c \in (a,b)$ فهل يشترط أن يكون $f'(c)=0$ ؟

وللاجابة على السؤال اليك المثال الاتي:

مثال -1-

لتكن $f:[-1,1] \to R, f(x)=|x|$

وكما تلاحظ في الشكل أدناه فإن

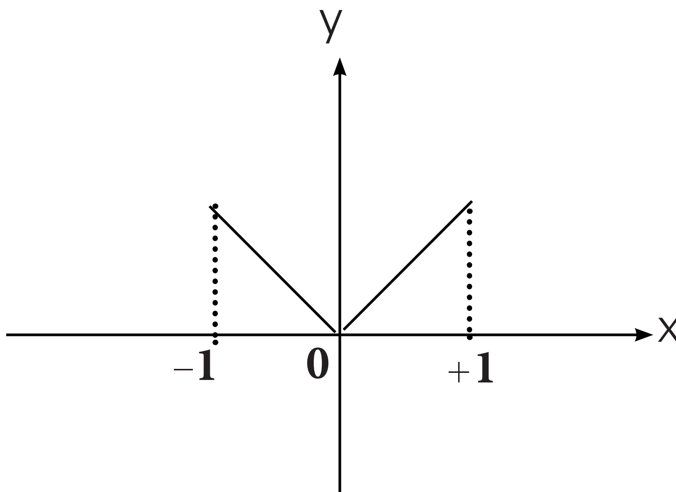
الدالة f تمتلك اعظم قيمة عند كل من $x=-1$ ، $x=1$

وتمتلك اصغر قيمة عند $x=0$

وانت تعلم من دراستك السابقة أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$

اي ان $f'(0)$ غير موجودة .

$\therefore$ لا يشترط أن يكون $f'(c)=0$



تعريف [3-2]

لتكن الدالة f معرّفة عند العدد c . يقال عن العدد c بأنه عدد حرج (**Critical Number**) اذا كان $f'(c)=0$ او ان الدالة غير قابلة للاشتقاق في c وتسمى النقطة $(c, f(c))$ بالنقطة الحرجة

ففي المثال السابق : $f:[-1,1] \to R \ \ni \ f(x)=|x|$

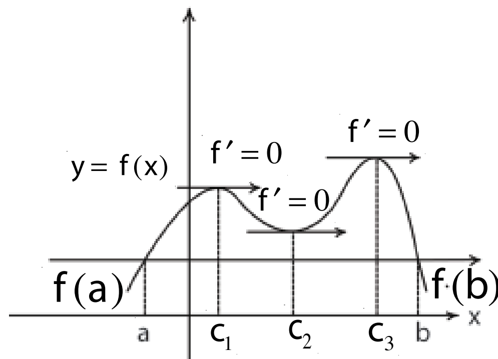
تلاحظ أن الدالة معرفة عند صفر ، وان $f'(0)$ غير موجودة

لذا يقال أن العدد "صفر" هو العدد الحرج للدالة f وان النقطة $(0, f(0))$ هي النقطة الحرجة .

Rolle's Theorem مبرهنة رول

مبرهنة رول : لقد وضع العالم الفرنسي (متشل رول) مبرهنة مبسطة لإيجاد نقط تمثل نقطاً حرجة للدالة في الفترة المعطاة وسميت هذه المبرهنة باسمه.

(3-2) مبرهنة رول Rolles Theorem



إذا كانت الدالة f :

1) مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$

2) قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b)

3) $f(b)=f(a)$

فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c تنتمي الى (a,b) وتحقق : $f'(c)=0$

مثال -2- بين هل أن مبرهنة رول تتحقق لكل من الدوال التالية؟ وجد قيمة c الممكنة:

a) $f(x)=(2-x)^2 \quad , \quad x\in[0,4]$

b) $f(x)=9x+3x^2-x^3 \quad , \quad x\in[-1,1]$

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \quad x\in[-1,2] \\ -1 & , \quad x\in[-4,-1) \end{cases}$

d) $f(x)=k \quad , \quad x\in[a,b]$

a) $f(x)=(2-x)^2 , x\in[0,4]$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[0,4]$ لأنها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(0,4)$ لأنها كثيرة الحدود.

الشرط الثالث:
$$f(0)=(2-0)^2=4$$
$$f(4)=(2-4)^2=4 \quad \Rightarrow \quad f(0)=f(4)$$

∴ الدالة ضمن الفترة المعطاة تحقق مبرهنة رول.

$f'(x)=-2(2-x)$

$f'(c)=-2(2-c)$

$f'(c)=0 \Rightarrow -2(2-c)=0$

$\therefore c=2 \in (0,4)$

b) $f(x)=9x+3x^2-x^3 \quad , \quad x \in [-1,1]$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على الفترة المغلقة $[-1,1]$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة $(-1,1)$ لأنها كثيرة الحدود .

الشرط الثالث : $f(-1)=-9+3+1=-5$

$f(1)=9+3-1=11 \Rightarrow f(-1) \neq f(1)$

لاتتحقق مبرهنة رول لأن الشرط الثالث لم يتحقق .

c) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x \in [-1,2] \\ -1 & x \in [-4,-1) \end{cases}$

الحل

مجال الدالة = $[-4,2]$

الشرط الاول :

$$\begin{cases} \lim_{x \to (-1)^+} (x^2+1)=2=L_1 \\ \lim_{x \to (-1)^-} (-1)=-1=L_2 \end{cases}$$

الدالة لسيت مستمرة لأن $L_1 \neq L_2$ في الفترة $[-4,2]$

$\therefore$ لا تحقق مبرهنة رول

d) $f(x)=k \quad , \quad x \in [a,b]$

الحل

الشرط الاول : الدالة مستمرة على $[a,b]$ لانها دالة ثابتة .

الشرط الثاني : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b) .

الشرط الثالث : $f(a)=f(b)=k$

$\therefore$ الدالة تحقق مبرهنة رول . وان قيمة c يمكن ان تكون اي قيمة ضمن الفترة (a, b) .

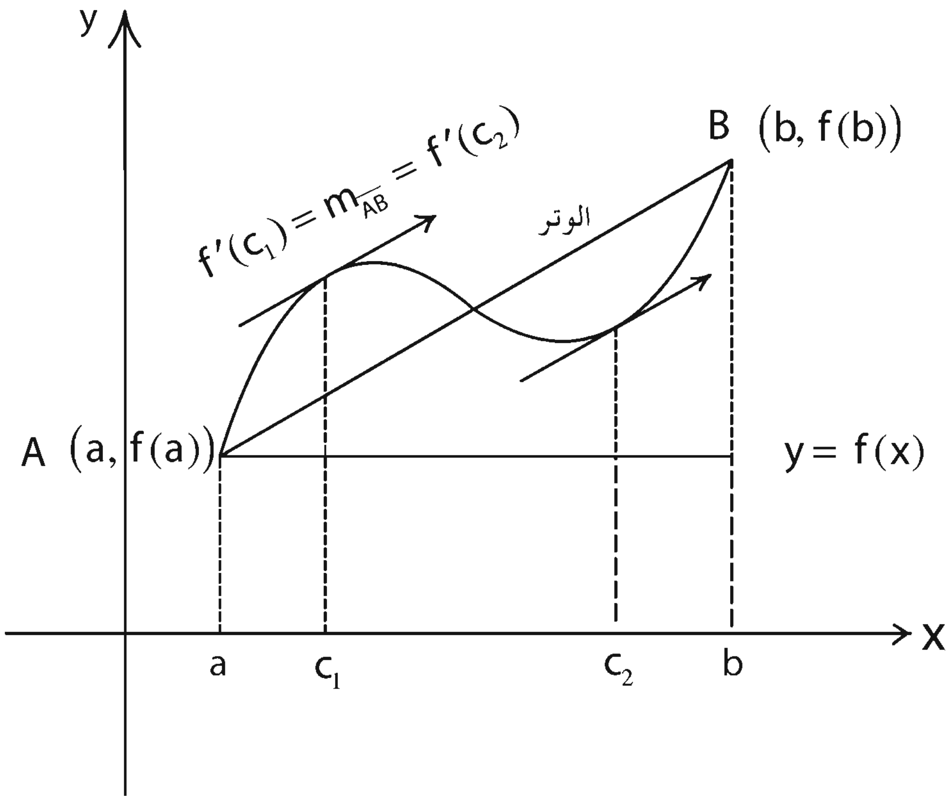
The Mean Value Theorem (3-3)مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت **f** دالة مستمرة في الفترة المغلقة [**a,b**] وقابلة للاشتقاق على الفترة المفتوحة (**a,b**)
فإنه يوجد على الأقل قيمة واحدة c ينتمي الى (**a,b**) وتحقق : $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

او $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$

والمخطط التالي يعطي التفسير الهندسي لمبرهنة القيمة المتوسطة :

المماس يوازي الوتر $\overline{AB}$



ميل الوتر المار بالنقطتين **A,B** يساوي $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ميل المماس للمنحني عند c = المشتقة الاولى للدالة **f** عند c , ($f'(c)$)

لكن المماس والوتر متوازيان لذا يتساوى ميلاهما $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

ملاحظة

أن مبرهنة رول هي حالة خاصة من مبرهنة القيمة المتوسطة ففي مبرهنة رول يجب توافر شرط ثالث هو : $f(a) = f(b)$

أي أن الوتر والمماس يوازيان محور السينات

أي فرق الصادات =0 لذا يصبح الميل =0 فنحصل على : $f'(c) = 0$

مثال- 3- برهن ان الدوال الاتية تحقق شروط مبرهنة القيمة المتوسطة واوجد قيم c :

$$a)\ f(x) = x^2 - 6x + 4,\ x \in [-1,7]$$

$$b)\ f(x) = \sqrt{25 - x^2},\ x \in [-4,0]$$

الحل

$$a)\ f(x) = x^2 - 6x + 4,\ x \in [-1,7]$$

الشرط الأول يتحقق : الدالة مستمرة في الفترة $[-1, 7]$ لأنها كثيرة الحدود.

الشرط الثاني يتحقق : الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 7)$ لانها دالة كثيرة الحدود.

ميل المماس

$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(c) = 2c - 6$$

ميل الوتر

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(7) - f(-1)}{7 + 1} = \frac{11 - 11}{8} = 0$$

ميل المماس = ميل الوتر

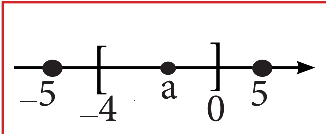
$$0 = 2c - 6 \Rightarrow c = 3 \in (-1, 7)$$

b) $f(x)=\sqrt{25-x^2}$ ، $x\in[-4,0]$

الحل

مجال f = مجموعة حل المتباينة $25-x^2\geq 0$ اي $[-5,5]$

1) استمرارية f في $[-4,0]$: نثبت الاستمرارية اولاً في الفترة المفتوحة $I=(-4,0)$ بعدها عن طرفي الفترة .



لتكن $a\in I \Leftarrow$ $f(a)=\sqrt{25-a^2}\in R$ لان a ضمن مجال الدالة

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-a^2}\Rightarrow f(a)=\lim_{x\to a} f(x)$$

∴ مستمرة في $(-4,0)$

$$\lim_{x\to -4^+} f(x)=\lim_{x\to -4^+}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-16}=3=f(-4)$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\sqrt{25-x^2}=\sqrt{25-0}=5=f(0)$$

∴ f مستمرة عند طرفي الفترة $[-4,0]$ $\Leftarrow$ f مستمرة على الفترة المغلقة $[-4,0]$

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}$$

2) قابلية الاشتقاق : مجال $f'=(-5.5)$ $\Leftarrow$ f قابلة للاشتقاق في الفترة $(-4,0)$ لانها محتواة كلياً في مجال مشتقة f

3) ميل المماس

$$f'(x)=\frac{-x}{\sqrt{25-x^2}}\Rightarrow f'(c)=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

ميل الوتر

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(0)-f(-4)}{0+4}=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$$

ميل المماس = ميل الوتر

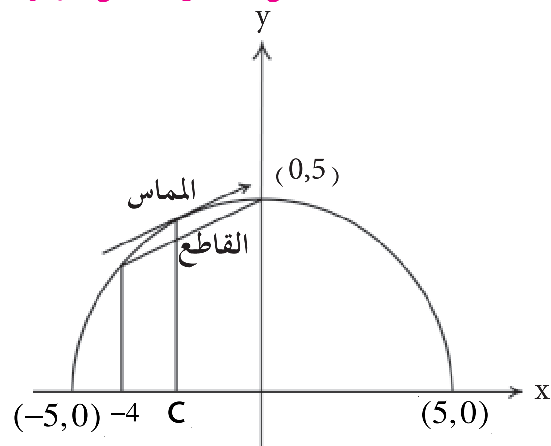
$$\frac{1}{2}=\frac{-c}{\sqrt{25-c^2}}$$

$$\sqrt{25-c^2}=-2c \Rightarrow$$

$$25-c^2=4c^2\Rightarrow c^2=5\Rightarrow c=\pm\sqrt{5}$$

$$c=\sqrt{5}\notin(-4,0)$$

$$c=-\sqrt{5}\in(-4,0)$$



مثال -4-

اذا كانت $f(x)=x^3-4x^2$ ، $f:[0,b]\to R$

وكانت **f** تحقق مبرهنة القيمة المتوسطة عند $c=\frac{2}{3}$ فجد قيمة **b** .

الحل

ميل المماس $f'(x)=3x^2-8x \Rightarrow f'(c)=3c^2-8c \Rightarrow f'\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{3}-\frac{16}{3}=-4$

ميل الوتر $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(b)-f(0)}{b-0}=\frac{b^3-4b^2-0}{b}=b^2-4b$

ميل المماس = ميل الوتر

$$\therefore b^2-4b=-4 \Rightarrow b^2-4b+4=0 \Rightarrow (b-2)^2=0 \Rightarrow b=2$$

نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

إذا كانت **f** دالة مستمرة ومعرفة على $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في (a,b) ولو اعتبرنا $h=b-a$ فأن $b=a+h$ حيث $h\neq 0, h\in R$ فانه بموجب مبرهنة القيمة المتوسطة نحصل على :

$$f'(c)=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

$$\Rightarrow f(a+h)=f(a)+hf'(c)$$

وعندما يكون اقتراب **b** من **a** قرباً كافياً تكون في هذة الحالة **h** صغيرة ويصبح الوتر صغيراً ونهايتيه قريبتان من **a** أي أن المماس عند **c** سيكون مماساً للمنحني عند نقطة قريبة جداً من النقطة حيث $x=a$ ولذلك يصبح : $f(a+h)\approx f(a)+hf'(a)$

يقال للمقدار $hf'(a)$ التغير التقريبي للدالة.

التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة

ملاحظة :- سوف نقتصر في حل تمارين التقريب باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة فقط

مثال -5- جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة تقريباً مناسباً للعدد $\sqrt{26}$

الحل

لتكن

$y = f(x) = \sqrt{x}$... الدالة $x \geq 0$

نفرض $a = 25$ (اقرب مربع كامل من العدد 26)

$b = 26$
$a = 25$... القيمة السهلة
$h = 1 = b - a$

$$h = b - a = 1$$

$$f(a) = f(25) = \sqrt{25} = 5$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(a) = \frac{1}{10} = 0.1$$

ومن النتيجة :

$$f(b) \cong f(a) + (b-a) f'(a)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$f(a+h) \cong f(a) + hf'(a)$$

$$\sqrt{26} = f(25+1) \cong f(25) + (1)xf'(25)$$

$$\therefore \sqrt{26} \cong 5 + 1 \times (0.1) = 5.1$$

مثال -6-

اذا كان $f(x)=x^3+3x^2+4x+5$ فجد بصورة تقريبية $f(1.001)$

الحل

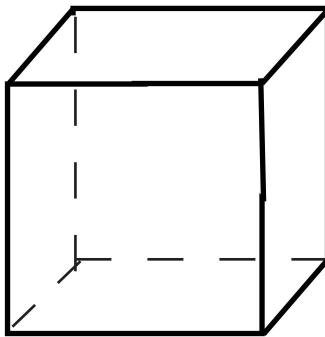
b =1.001
a = 1
h= b−a =0.001

$$f(1)=1+3+4+5=13$$
$$f'(x)=3x^2+6x+4$$
$$f'(1)=3+6+4=13$$
$$f(a+h);\ f(a)+hf'(a)$$
$$f(1.001)=f(1)+(0.001)f'(1)$$
$$=13+(0.001)(13)$$
$$=13.013$$

مثال -7- مكعب طول حرفه **9.98cm** جد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

الحل

ليكن **V** حجم المكعب الذي طول حرفه (X)



$b=9.98$
$a=10$
$h=b-a=-0.02$

اي ان الدالة تكون على الصيغة

$$v(x)=x^3$$
$$x\in\ [9.98,10]$$
$$v(10)=10^3=1000$$
$$v'(x)=3x^2\Rightarrow v'(10)=3(10)^2=300$$
$$v(9.98)\cong 1000+(-0.02)(300)\cong 994\ cm^3$$

مثال –8– لتكن $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ فاذا تغيرت **x** من **8** إلى **8.06** فما مقدار التغير التقريبي للدالة؟

الحل

الدالة : $f:[8,8.06]\rightarrow R \ , \ f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

$$b=8.06$$
$$a=8=2^3$$
$$h=b-a=0.06$$

المشتقة :

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

$$f'(a)=f'(8)=\frac{2}{3\sqrt[3]{8}}=\frac{1}{3}=0.333$$

التغير التقريبي **0.02** $= \ hf'(8)\cong(0.06)\ \frac{1}{3}$

مثال –9– يراد طلاء مكعب طول ضلعه **10cm** فاذا كان سمك الطلاء **0.15cm** اوجد حجم الطلاء بصورة تقريبية وباستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة .

الحل

$$b=10.3$$
$$a=10$$
$$h=b-a=0.3$$

$$v(x)=x^3$$
$$v'(x)=3x^2$$
$$v'(a)=v'(10)=(3)(10)^2=300$$

حجم الطلاء بصورة تقريبية $hv'(10)\cong(0.3)(300)=90cm^3$

مثال 10

باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة جد وبصورة تقريبية ومقرباً لثلاث مراتب عشرية على الاقل كلاً من :

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

b) $\sqrt[3]{7.8}$

c) $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

d) $\sqrt[3]{0.12}$

الحل

a) $\sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3$

الدالة : $f(x)=x^{\frac{3}{5}}+x^4+3$

المشتقة : $f'(x)=\frac{3}{5}x^{\frac{-2}{5}}+4x^3$

تعويض بالدالة : $f(a)=f(1)=1^{\frac{3}{5}}+1^4+3=5$

تعويض بالمشتقة : $f'(a)=f'(1)=\left(\frac{3}{5}\right)(1)^{\frac{-2}{5}}+(4)(1)^3=4.6$

تعويض بالقانون

b = 0.98 a = 1
h = b − a = −0.02

$$f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$$

$$f(0.98)=f(1)+(-0.02).f'(1)$$

$$f(0.98)=5+(-0.02).(4.6)$$

$$f(0.98)=5-0.092=4.908$$

$$\therefore \sqrt[5]{(0.98)^3}+(0.98)^4+3\cong 4.908$$

b) $\sqrt[3]{7.8}$

الحل

الدالة : $f(x)=\sqrt[3]{x}$

المشتقة : $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

$b = 7.8$
$a = 8 = 2^3$
$h = b - a = -0.2$

التعويض بالدالة : $f(a)=f(8)=\sqrt[3]{8}=2$

التعويض بالمشتقة : $f'(a)=f'(8)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{8^2}}=\dfrac{1}{12}=0.083$

وبالتعويض بالقانون : $f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$ نحصل على

$$f(7.8)=f(8)+(-0.2)f'(8)\cong 2-(0.2)(0.083)$$
$$=2-0.0166=1.9834$$
$$\therefore \sqrt[3]{7.8}\cong 1.9834$$

c) $\sqrt{17}+\sqrt[4]{17}$

الحل

الدالة : لتكن $f(x)=x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{4}}$

المشتقة : $f'(x)=\dfrac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}+\dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$

$b = 17$
$a = 16$
$h = b - a = 17 - 16 = 1$

تعويض بالدالة : $f(16)=(2^4)^{\frac{1}{2}}+(2^4)^{\frac{1}{4}}=4+2=6$

تعويض بالمشتقة :

$$f'(16)=\frac{1}{2}(2^4)^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{4}(2^4)^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{2}(2^{-2})+\frac{1}{4}(2^{-3})=0.5\left(\frac{1}{2}\right)^2+0.25\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$f'(16)=(0.5)(0.5)^2+(0.25)(0.5)^3=(0.5)(0.25)+(0.25)(0.125)$$

$$=0.125+0.031=0.156$$

التعويض بالقانون نحصل على

$$f(a+h)\cong f(a)+hf'(a)$$

$$f(17)\cong f(16)+(1)f'(16)$$

$$f(17)\cong 6+(1)(0.156)$$

$$\therefore \sqrt{17}+\sqrt[4]{17}\cong 6.156$$

d) $\sqrt[3]{0.12}$

الحل

الدالة $f(x)=x^{\frac{1}{3}}$

المشتقة $f'(x)=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$

تعويض بالدالة $f(0.125)=\left((0.5)^3\right)^{\frac{1}{3}}=0.5$

تعويض بالمشتقة $f'(0.125)=\frac{1}{3}\left[(0.5)^3\right]^{-\frac{2}{3}}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}=\frac{1}{3}(2)^2=\frac{4}{3}=1.333$

وبالتعويض بالقانون نحصل على :

b =0.120
a= 0.125
h= b−a = −0.005

$$f(a+h)\cong f(a)+h.f'(a)$$

$$f(0.12)\cong f(0.125)+(-0.005).(1.333)$$

$$f(0.12)\cong 0.5-0.006665$$

$$f(0.12)\cong 0.493335$$

$$\therefore \sqrt[3]{0.12}\cong 0.493335$$

تمارين (3-3)

1. اوجد قيمة c التي تعينها مبرهنة رول في كل مما يأتي :

a) $f(x)=x^3-9x \quad ,x\in [-3,3]$

b) $f(x)=2x+\frac{2}{x} \quad ,x\in \left[\frac{1}{2},2\right]$

c) $f(x)=(x^2-3)^2 \quad ,x\in [-1,1]$

2. جد تقريباً لكل مما يلي باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة :

a) $\sqrt{63}+\sqrt[3]{63}$ b) $(1.04)^3+3(1.04)^4$

c) $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ d) $\frac{1}{101}$ e) $\sqrt{\frac{1}{2}}$

3. كرة نصف قطرها **6cm** طليت بطلاء سمكه **0.1cm** جد حجم الطلاء بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة.

4. كرة حجمها $84\pi \ cm^3$ ، جد نصف قطرها بصورة تقريبية باستخدام نتيجة القيمة المتوسطة.

5. مخروط دائري قائم ارتفاعه يساوي طول قطر قاعدته فاذا كان ارتفاعه يساوي **2.98cm** فجد حجمه بصورة تقريبية باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطه.

6. بين أن كل دالة من الدوال التالية تحقق مبرهنة رول على الفترة المعطاة ازاء كل منها ثم جد قيمة c :

a) $f(x)=(x-1)^4 \quad ,[-1,3]$

b) $h(x)=x^3-x \quad ,[-1,1]$

c) $g(x)=x^2-3x \quad ,[-1,4]$

d) $f(x)=\cos 2x+2\cos x \quad ,[0,2\pi]$

7. اختبر امكانية تطبيق القيمة المتوسطة للدوال التالية على الفترة المعطاة إزاءها مع ذكر السبب وإن تحققت المبرهنة، جد قيم c الممكنة.

a) $f(x)=x^3-x-1 \quad ,[-1,2]$

b) $h(x)=x^2-4x+5 \quad ,[-1,5]$

c) $g(x)=\frac{4}{x+2} \quad ,[-1,2]$

d) $B(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2} \quad ,[-2,7]$

[3-4] اختبار التزايد والتناقص للدالة باستخدام المشتقة الاولى.

The First Derivative Test For Increasing And Decreasing of a Function

نتيجة

ان من النتائج المهمة لمبرهنة القيمة المتوسطة هي النتيجة الاتية :

لتكن **f** مستمرة في الفترة المغلقة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة (a,b) فإذا كانت

$$1-\ f'(x)>0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \ \text{Increasing} \ (\text{متزايدة})$$

$$2-\ f'(x)<0, \forall x \in (a,b) \Rightarrow f \ \text{Decreasing} \ (\text{متناقصة})$$

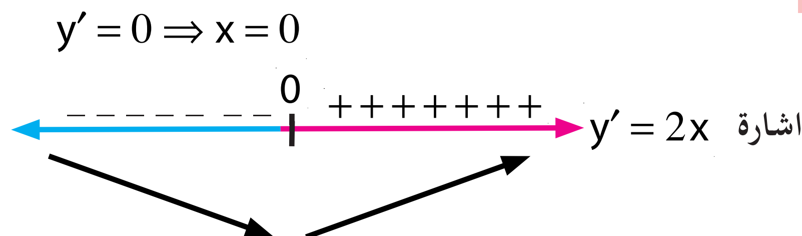
أما بقية الحالات فسوف لانتطرق لها في هذه المرحلة.

مثال -1- لتكن $y=f(x)=x^2$. جد مناطق التزايد والتناقص

الحل

$$y=f(x)=x^2 \Rightarrow y'=2x$$

$$y'=0 \Rightarrow x=0$$



$\because f'(x)>0, \forall x>0$

$\therefore$ f متزايدة في $\{x : x>0\}$

$\because f'(x)<0, \forall x<0$

$\therefore$ f متناقصة في $\{x : x<0\}$

مثال -2-

جد مناطق التزايد والتناقص لكل من الدالتين الاتيتين:

a) $f(x)=9x+3x^2-x^3$ b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2}$

الحل

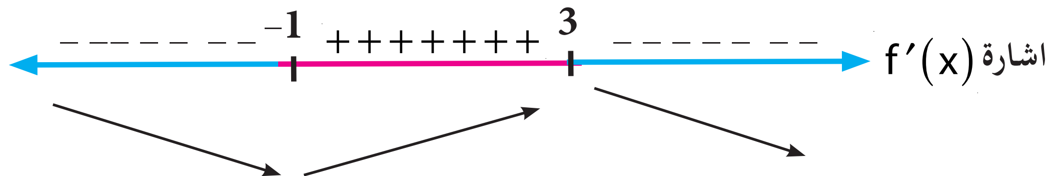
a) $f(x)=9x+3x^2-x^3 \Rightarrow f'(x)=9+6x-3x^2$

$0=9+6x-3x^2$

$0=-3(x^2-2x-3)$

$0=(x-3)(x+1) \Rightarrow x=3, x=-1$

نختبر على خط الأعداد إشارة المشتقة الأولى بالتعويض بقيم مجاورة للعددين : $x=3, x=-1$



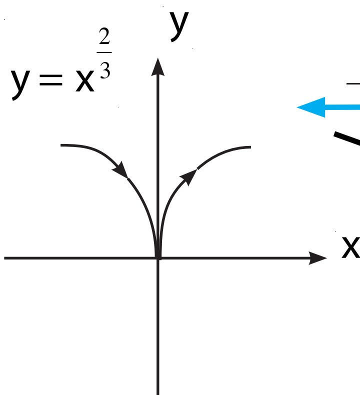
f متناقصة : في $\{x : x<-1\}, \{x : x>3\}$

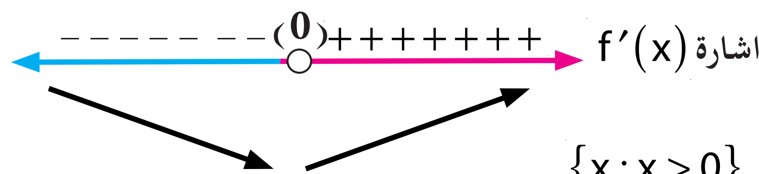
f متزايدة : في الفترة المفتوحة $(-1,3)$

الحل

b) $f(x)=\sqrt[3]{x^2} \Rightarrow f'(x)=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

$f'(x)$ غير معرفه اذا كانت $x=0$, اي $x=0$ عدد حرج





f متزايدة في $\{x : x>0\}$

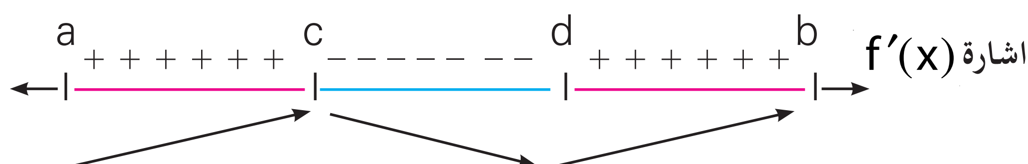
f متناقصة في $\{x : x<0\}$

[3-5] النهاية العظمى والنهاية الصغرى المحلية

لاحظ في الشكل أدناه أن الدالة $y=f(x)$ متزايدة على الفترة (a,c) لأن $f'(x)>0$ ، ومتناقصة على الفترة (c,d) لان $f'(x)<0$ ثم تتزايد في الفترة (d,b) .

كما أن $f'=0$ عند كل من $x=c\ ,\ x=d$

تسمى نقطة $(c, f(c))$ نقطة نهاية عظمى محلية وإن $f(c)$ هي النهاية العظمى المحلية (**Local Maximum**) وتدعى النقطة $(d, f(d))$ نقطة نهاية صغرى محلية وان $f(d)$ هي النهاية الصغرى المحلية (**Local Minimum**)



تعريف (3-3)

لتكن **f** دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وقابلة للاشتقاق عند $x=c$ التي تنتمي الى الفترة المفتوحة (a,b) فاذا كانت :

اشارة $f'(x)$: a + + + + + + c - - - - - - - - b

1) $f'(x)<0;\ \forall x\in(c,b)$

$f'(x)>0;\ \forall x\in(a,c)$

$f'(c)=0$

فإن $f(c)$ نهاية عظمى محلية

اشارة $f'(x)$: a - - - - - - - - c + + + + + + b

2) $f'(x)>0;\ \forall x\in(c,b)$

$f'(x)<0;\ \forall x\in(a,c)$

$f'(c)=0$

فإن $f(c)$ نهاية صغرى محلية

ملاحظة

لكي نختبر القيمة العظمى والصغرى المحلية للدالة f بواسطة المشتقة الاولى للدالة f نتبع الخطوات الاتية :

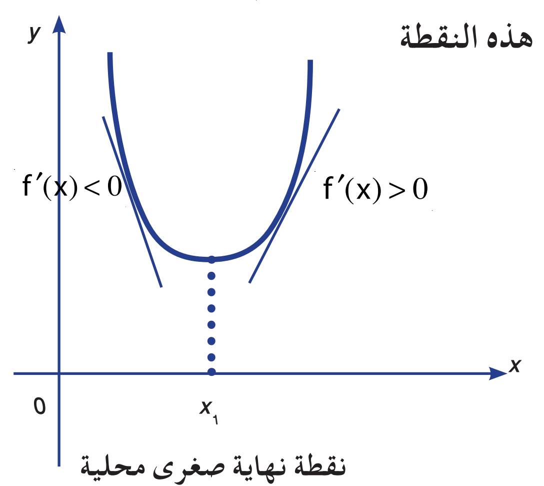
- نجد الاعداد الحرجة وذلك بحل المعادلة $f'(x)=0$ * وليكن $x=x_1$ هو أحد هذه الأعداد الحرجة
- نختبر إشارة $f'(x)$ بجوار $x=x_1$ فاذا كانت إشارة $f'(x)$ موجبة $\forall x<x_1$ وسالبة $\forall x>x_1$

فهذا يعني أن النقطة $(x_1, f(x_1))$ نقطة نهاية عظمى محلية

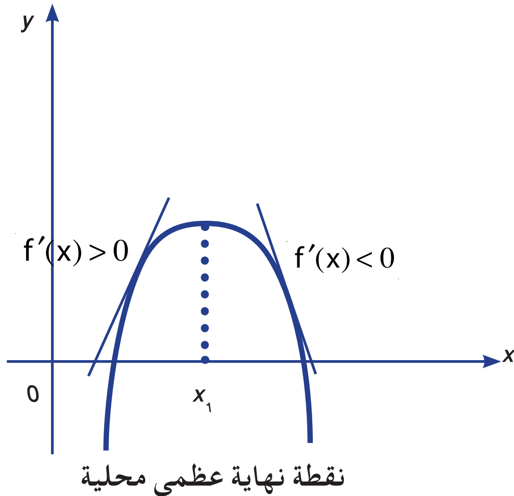
أما إذا كانت اشارة $f'(x)$ سالبة $\forall x<x_1$ وموجبة $\forall x>x_1$

فهذا يعني أن $(x_1, f(x_1))$ نقطة نهاية صغرى محلية

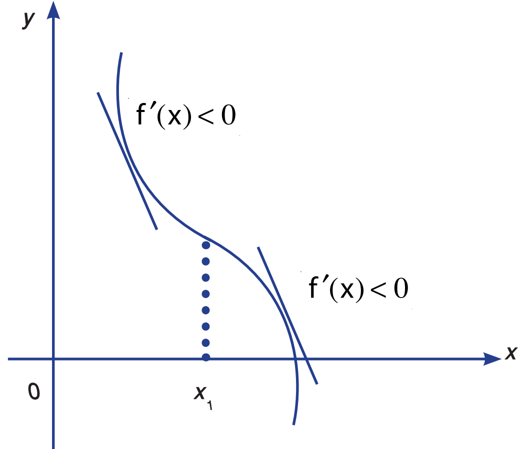
أما إذا كانت اشارة $f'(x)$ لاتغير قبل وبعد x_1 فلا يكون للدالة نقطة نهاية عظمى ولاصغرى عند هذه النقطة

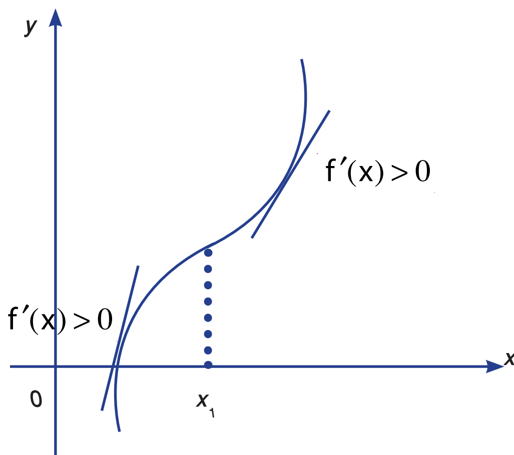


نقطة نهاية صغرى محلية



نقطة نهاية عظمى محلية





لا توجد نهايات

* سنقتصر في بحثنا على الدوال القابلة للاشتقاق .

مثال- 3-

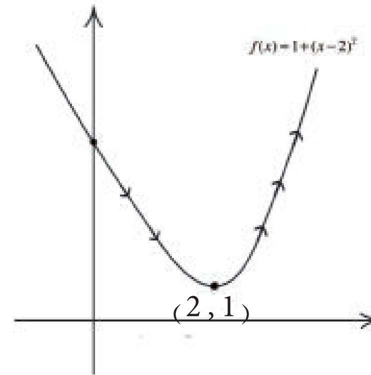
جد نقط النهايات العظمى والصغرى المحلية للدالة f في حالة وجودها اذا علمت أن :

$a)\ f(x) = 1 + (x-2)^2$

$b)\ f(x) = 1 - (x-2)^2$

$c)\ f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

الحل

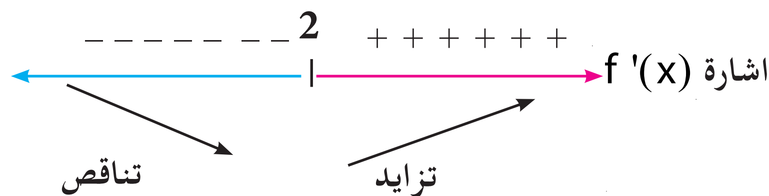


$a)\ f(x) = 1 + (x-2)^2$

$\Rightarrow f'(x) = 2(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow 2(x-2) = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 1 + (2-2)^2 = 1$



f متزايدة في $\{x : x > 2\}$

f متناقصة في $\{x : x < 2\}$

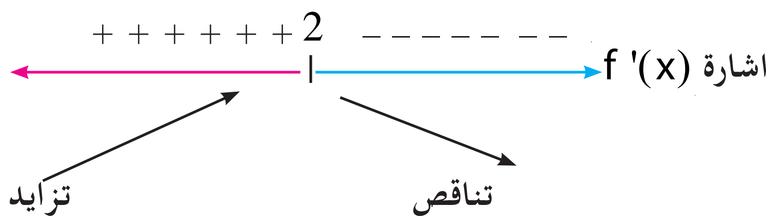
$\therefore$ النقطة $(2, f(2)) = (2,1)$ تمثل نقطة نهاية صغرى محلية .

$b)\ f(x) = 1 - (x-2)^2$

$\Rightarrow f'(x) = -2(x-2)$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2$

$f(2) = 1 - (2-2)^2 = 1$



f متزايدة في $\{x : x < 2\}$

f متناقصة في $\{x : x > 2\}$

$\therefore$ النقطة $(2,1)$ تمثل نقطة نهاية عظمى المحلية

$$c)\ f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

$$\Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$

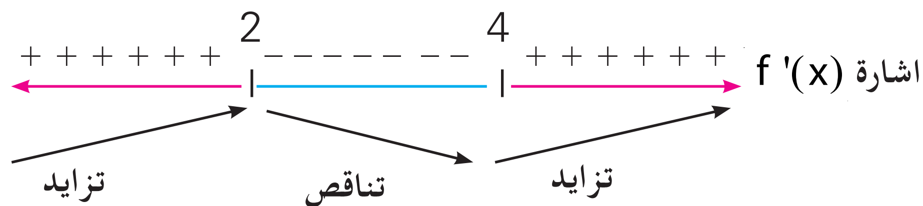
$$f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x^2 - 6x + 8) = 0$$

$$\Rightarrow 3(x-4)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = 4 \quad , \quad x = 2$$

$$f(4) = 16 \quad , \quad f(2) = 20$$

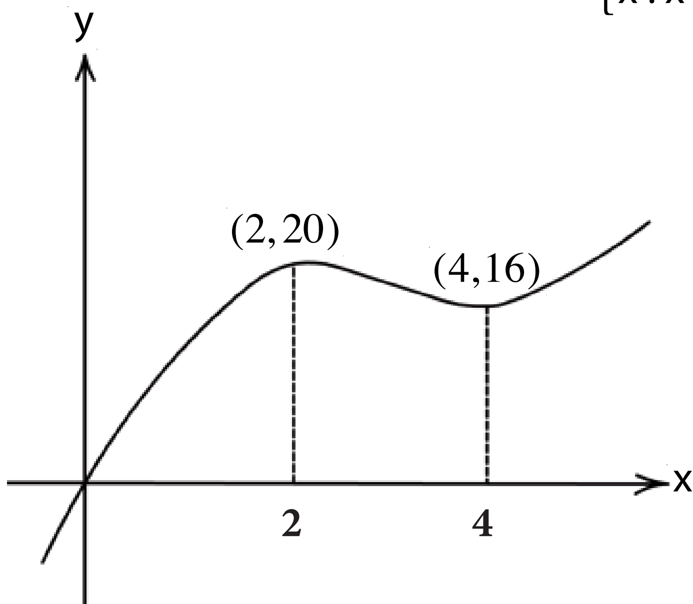


f متزايدة في $\{x : x > 4\}$, $\{x : x < 2\}$

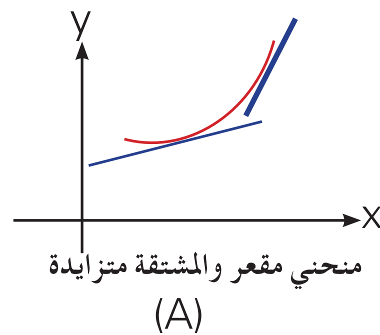
f متناقصة في الفترة المفتوحة (2 ,4)

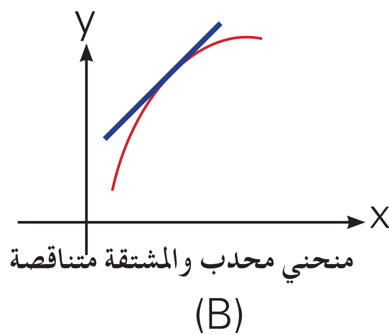
نقطة النهاية العظمى المحلية $(2,20)$

نقطة النهاية الصغرى المحلية $(4,16)$



[3-6] تقعر وتحدب المنحنيات ونقط الانقلاب





تعريف [3-4]

إذا كانت **f** دالة قابلة للاشتقاق في الفترة المفتوحة **(a,b)** فيقال عن الدالة **f** بأنها محدبة اذاكانت f' متناقصة خلال تلك الفترة وتسمى مقعرة اذا كانت f' متزايدة خلال تلك الفترة.

ملاحظة

المنحني مقعر في **(a,b)** (**Concave up**) $\Leftrightarrow$ المنحني يقع فوق جميع مماساته في **(a,b)**

والمنحني محدب في **(a, b)** (**Concave down**) $\Leftrightarrow$ المنحني يقع تحت جميع مماساته في **(a,b)** لاحظ الشكلين (**B**) ، (**A**)

مبرهنة (3-4)

اذا كانت **f** معرفة في **[a,b]** ولها مشتقة أولى وثانية على **(a,b)** فإنها تكون مقعرة على **(a,b)** اذا حققت الشرط الاتي :

$$f''(x) > 0 \quad \text{لكل} \quad x \in (a,b)$$

تكون محدبة على **(a,b)** اذا حققت الشرط الاتي :

$$f''(x) < 0 \quad \text{لكل} \quad x \in (a,b)$$

مثال -1-

إدرس تقعر وتحدب كل من الدالتين:

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^3$

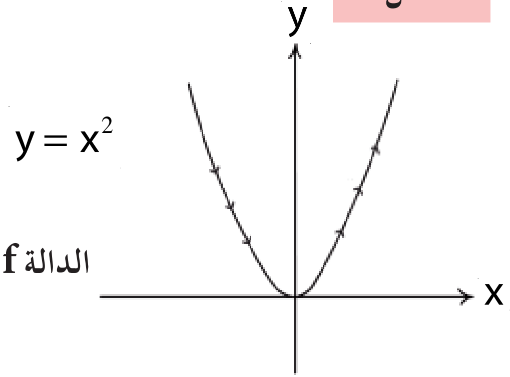
الحل

a) $f(x) = x^2$

$f'(x) = 2x$

$f''(x) = 2$

$\therefore f''(x) > 0, \forall x \in R \Rightarrow$ الدالة f مقعرة على R



b) $f(x) = x^3$

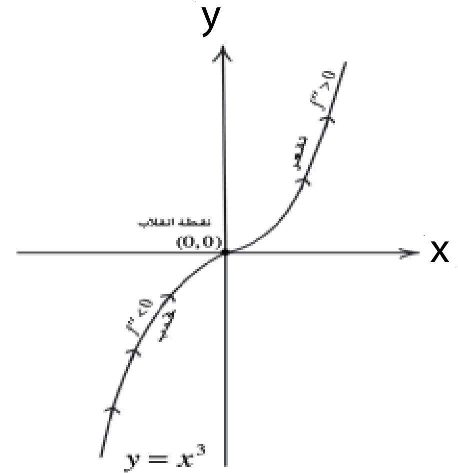
$f'(x) = 3x^2$

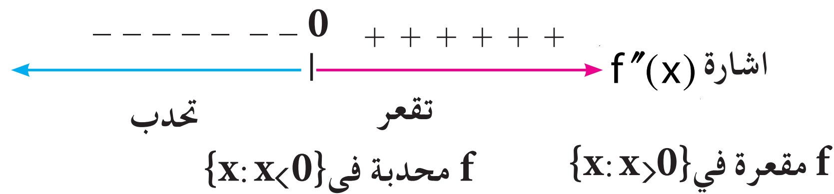
$f''(x) = 6x$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x = 0$

$\therefore x = 0$

$f(0) = 0$





f محدبة في $\{x: x < 0\}$ f مقعرة في $\{x: x > 0\}$

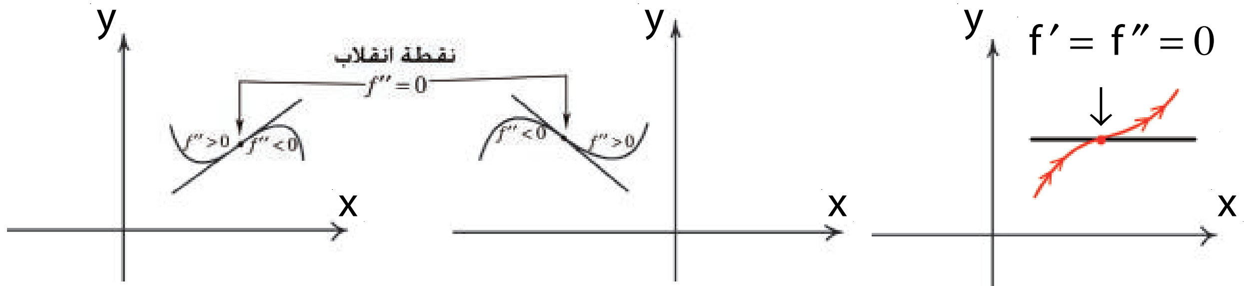
في هذا المثال (b) لاحظ أن المنحني في $\{x: x < 0\}$ محدب وفي $\{x: x > 0\}$ مقعر .

أي قبل النقطة $(0, f(0)) = (0,0)$ المنحني محدب وبعدها مقعر .

تسمى هذه النقطة نقطة انقلاب (**Point of Inflection**)

تعريف [3-5]

تدعى النقطة التي تنتمي لمنحني دالة والتي يتغير عندها منحني الدالة (من تقعر الى تحدب) أو بالعكس (من تحدب الى تقعر) بنقطة انقلاب لهذا المنحني.

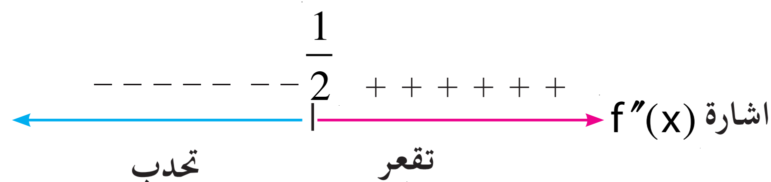


مثال -2- جد نقطة الانقلاب للمنحني: $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$

الحل

$$f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$$
$$f'(x)=6x^2-6x-12$$

$$f''(x)=12x-6$$
$$f''(x)=0$$
$$12x-6=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$$
$$f(\frac{1}{2})=-\frac{11}{2}$$



لندرس الآن اشارة $f''(x)$ في جوار $x=\frac{1}{2}$

نلاحظ عن يمين $\frac{1}{2}$ تكون $f''(x)$ موجبة

وعن يسار $\frac{1}{2}$ تكون $f''(x)$ سالبة

∴ النقطة $(\frac{1}{2},-\frac{11}{2})$ هي نقطة انقلاب.

مثال- 3-

جد مناطق التحدب والتقعر ونقط الانقلاب إن وجدت للدوال التالية :

a) $f(x) = 4x^3 - x^4$

b) $f(x) = x + \frac{1}{x}, x \neq 0$

c) $h(x) = 4-(x+2)^4$

d) $f(x) = 3 - 2x - x^2$

e) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

الحل

a) $f(x) = 4x^3 - x^4$

$f'(x) = 12x^2 - 4x^3$

$f''(x) = 24x - 12x^2$

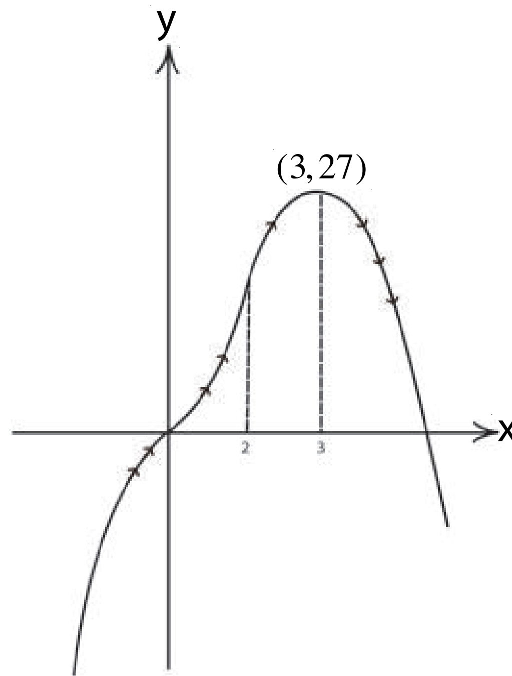
$f''(x) = 0$

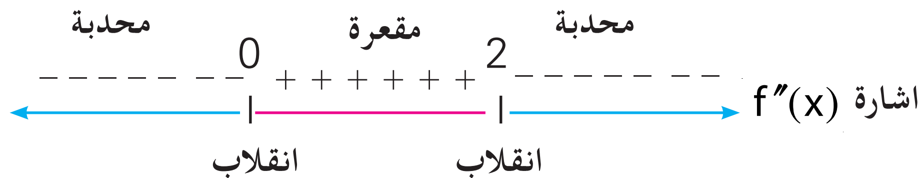
$0 = 12x(2 - x) \Rightarrow$

$x = 0$ ، $x = 2$

$f(0)=0$, $f(2) = 16$

$(0,0)$, $(2, 16)$





f محدبة في $\{x : x > 2\}$ و $\{x : x < 0\}$

f مقعرة في الفترة المفتوحة : $(0,2)$

$\therefore$ نقطتا الانقلاب هما : $(2,16)$ ، $(0,0)$

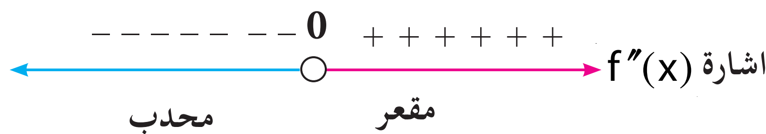
b) $f(x)=x+\frac{1}{x}, x\neq 0$

الحل

$f'(x)=1-\frac{1}{x^2}$

$f''(x)=\frac{2}{x^3}$

$f''(0)$ غير معرفة



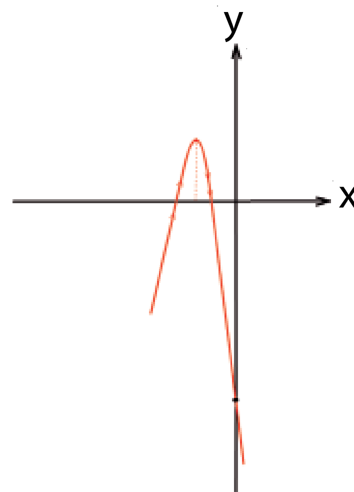
f محدبة : في $\{x: x<0\}$

f مقعرة : في $\{x: x>0\}$

لاتوجد نقطة انقلاب لأن 0 لاينتمي لمجال الدالة.

c) $h(x)=4-(x+2)^4$

الحل



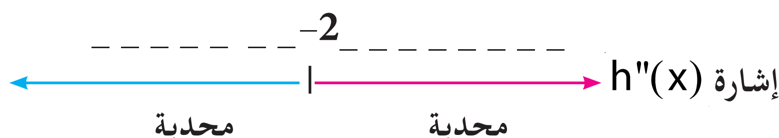
$h'(x)=-4(x+2)^3$

$h''(x)=-12(x+2)^2$

$h''(x)=0 \Rightarrow$

$0=-12(x+2)^2 \Rightarrow x=-2$

يمكن للطالب بالرجوع الى اختبار المشتقة الاولى ليجد ان للدالة نقطة نهاية عظمى محلية عند $(-2,4)$



الدالة h محدبة في $\{x: x<-2\}$ و $\{x: x>-2\}$

لاتوجد نقطة انقلاب عند $x=-2$ لأن الدالة محدبة على جهتيها

d) $f(x) = 3 - 2x - x^2$

الحل

$f'(x) = -2 - 2x$

$f''(x) = -2 < 0$

∴ f الدالة محدبة في R لذا لاتوجد نقطة انقلاب .

e) $f(x) = x^4 + 3x^2 - 3$

الحل

$f'(x) = 4x^3 + 6x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 + 6 > 0$ ، $x \in R$ لجميع قيم

الدالة f مقعرة في R . لذا لاتوجد نقطة انقلاب

[3-7] اختبار المشتقة الثانية لنقط النهايات العظمى والصغرى المحلية

بدلاً من ملاحظة كيفية تغير اشارة f' عند المرور بالنقطة الحرجة حيث $f'(x) = 0$
فانه بامكاننا استخدام الاختبار التالي لنقرر فيما إذا كانت النقطة الحرجة تمثل نقطة نهاية عظمى أو نهاية صغرى محلية . وذلك باستخدام اختبار المشتقة الثانية وكما يأتي :

1) اذا كان $f'(c) = 0$ وإن $f''(c) < 0$ فإن f تمتلك نهاية عظمى محلية عند x=c .

2) اذا كان $f'(c) = 0$ وإن $f''(c) > 0$ فإن f تمتلك نهاية صغرى محلية عند x=c .

3) اذا كانت $f''(c) = 0$ او $f''(c)$ غير معرفة فلا يصح هذا الاختبار (ويعاد الاختبار باستخدام المشتقة الاولى) .

مثال -1-

باستخدام اختبار المشتقة الثانية ان أمكن، جد النهايات المحلية للدوال الآتية:

a) $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$ c) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$

b) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}, x \neq 0$ d) $f(x) = 4 - (x+1)^4$

الحل

a) $f(x) = 6x - 3x^2 - 1$

$f'(x) = 6 - 6x$

$f'(x) = 0$

$0 = 6 - 6x \Rightarrow x = 1$

$f''(x) = -6 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0$

بما أن : $f'(1) = 0$ و $f''(1) < 0$. اذاً توجد نهاية عظمى محلية عند $x=1$

$\therefore$ النهاية العظمى المحلية هي: $f(1) = 6 - 3 - 1 = 2$

b) $f(x) = x - \frac{4}{x^2}$, $x \neq 0$

$f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$

$f'(x) = 0$

$0 = 1 + \frac{8}{x^3} \Rightarrow x^3 + 8 = 0 \Rightarrow x = -2$

$\because \quad f'(x) = 1 + \frac{8}{x^3}$

$\therefore \quad f''(x) = \frac{-24}{x^4}$

$f''(-2) = -\frac{24}{16} < 0$

بما أن : $f'(-2)=0$ و $f''(-2)<0$ ⇐ توجد نهاية عظمى محلية عند النقطة **x=−2**

∴ النهاية العظمى المحلية هي : $f(-2)=-2-1=-3$

c) $f(x)=x^3-3x^2-9x$

$f'(x)=3x^2-6x-9$

$f'(x)=0$

$0=3(x^2-2x-3)\Leftrightarrow 0=3(x-3)(x+1)$

$\Rightarrow$ **x=3** او **x=−1**

$f''(x)=6x-6$

عندما $x=3$ فان $\Rightarrow f''(3)=18-6=12>0$

∴ توجد نهاية صغرى محلية هي $f(3)=27-27-27=-27$

وعندما **x= −1** فان $\Rightarrow f''(-1)=-6-6=-12<0$

∴ توجد نهاية عظمى محلية هي **f(−1)=5**

d) $f(x)=4-(x+1)^4$

$f'(x)=-4(x+1)^3$

$f'(x)=0$

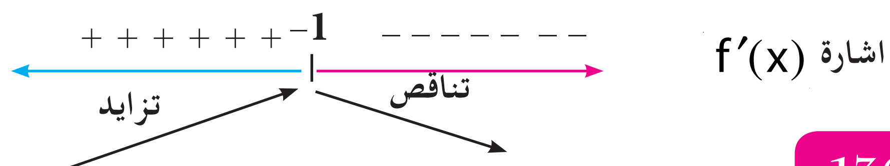
$0=-4(x+1)^3\Rightarrow x=-1$

$f''(x)=-12(x+1)^2$

$f''(-1)=0$

هذه الطريقة لا تصح نعود الى ملاحظة تغير اشارة f' بجوار **x=−1**

اشارة $f'(x)$



وبما أن f متزايدة في $\{x: x<-1\}$

ومتناقصة في $\{x: x>-1\}$

∴ توجد نهاية عظمى محلية هي : $f(-1)=4-(-1+1)^2=4$

مثال -2- لتكن $f(x)=x^2+\frac{a}{x}, x\neq 0$, $a\in R$

فجد قيمة a علماً أن الدالة تمتلك نقطة انقلاب عند $x=1$ ، ثم بين أن الدالة f لاتمتلك نهاية عظمى محلية.

الحل

$$f(x)=x^2+\frac{a}{x} \Rightarrow f'(x)=2x-\frac{a}{x^2} \Rightarrow f''(x)=2+\frac{2a}{x^3}$$

$$f''(1)=2+\frac{2a}{(1)^3}=0$$

$$\Rightarrow 2+2a=0 \Rightarrow a=-1$$

$$\because f(x)=x^2-\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f'(x)=2x+\frac{1}{x^2}$$

$$\Rightarrow f'(x)=0 \Rightarrow 2x+\frac{1}{x^2}=0$$

$$\Rightarrow 2x^3=-1 \Rightarrow x^3=\frac{-1}{2}$$

$$\Rightarrow x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=2-\frac{2}{x^3} \Rightarrow f''(x)=2-\frac{2}{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f''(x)=6>0 \ , \ \forall x\in R$$

∴ توجد نهاية صغرى محلية عند $x=-\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

∴ لاتمتلك f نهاية عظمى محلية

مثال –3–

عين قيمتي الثابتين **b,a** لكي يكون لمنحني الدالة $y=x^3+ax^2+bx$ نهاية عظمى محلية عند $x=-1$ ، ونهاية صغرى محلية عند $x=2$ ثم جد نقطة الانقلاب .

الحل

$$y=x^3+ax^2+bx$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=3x^2+2ax+b$$

بما أن للدالة نهاية عظمى محلية عند $x=-1$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=0$$

$$0=3(-1)^2+2a(-1)+b \Rightarrow 0=3-2a+b \ldots(1)$$

بما أن للدالة نهاية صغرى محلية عند $x=2$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=0$$

$$0=3(2)^2+2a(2)+b \Rightarrow 0=12+4a+b \ldots(2)$$

وبحل المعادلتين (1) و (2) آنياً نجد ان :

$$a=\frac{-3}{2}, b=-6$$

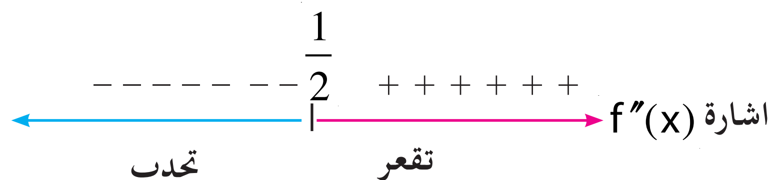
$$\therefore y=x^3-\frac{3}{2}x^2-6x$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=3x^2-3x-6$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2}=6x-3$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=0 \Rightarrow 6x-3=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}$$



بما أن **f** مقعرة في $\left\{x : x>\frac{1}{2}\right\}$ ومحدبة في $\left\{x : x<\frac{1}{2}\right\}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-26}{8}=\frac{-13}{4}$$

$\therefore \left(\frac{1}{2},\frac{-13}{4}\right)$ نقطة انقلاب

مثال -4-

اذا كان منحني الدالة : $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

مقعر في $\{x : x < 1\}$ ومحدب في $\{x : x > 1\}$

ويمس المستقيم : $y + 9x = 28$ عند النقطة $(3,1)$ فجد قيم الاعداد الحقيقية c, b, a .

الحل

$\because$ الدالة مستمرة لأنها كثيرة الحدود ،مقعرة في $\{x : x < 1\}$ ومحدبة في $\{x : x > 1\}$ فهي تمتلك نقطة انقلاب عند $x = 1$

$\therefore f'(x) = 3ax^2 + 2bx$

$f''(x) = 6ax + 2b$

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6a + 2b = 0 \qquad \div 2$

$3a + b = 0 \Rightarrow b = -3a \quad ...(1)$

ميل المماس $y + 9x = 28$ هو $\frac{dy}{dx} = -9$

$f'(3)$ هو ميل المماس لمنحني الدالة f عند $x = 3$

$f'(3) = 27a + 6b$

$-9 = 27a + 6b \qquad \div 3$

$\Rightarrow -3 = 9a + 2b \qquad ....(2)$

النقطة $(3,1)$ تحقق معادلة منحني الدالة $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + c$

$\therefore 1 = 27a + 9b + c \quad \ldots(3)$

وبالتعويض من (1) في (2) ينتج:

$-3 = 9a + 2(-3a) \Rightarrow a = -1 \Rightarrow b = -3(-1) = 3$

وبالتعويض في المعادلة (3) ينتج :

$1 = -27 + 27 + c \Rightarrow c = 1$

مثال -5- اذا كان للدالة $f(x) = ax^3 + 3x^2 + c$ نهاية عظمى محلية تساوي **8**، ونقطة انقلاب عند $x = 1$ فجد قيمة $a, c \in R$.

الحل

عند $x = 1$ توجد نقطة انقلاب

$f''(1) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 6x$

$f''(x) = 6ax + 6 \Rightarrow f''(1) = 0$

$\therefore 0 = 6a + 6 \Rightarrow a = -1$

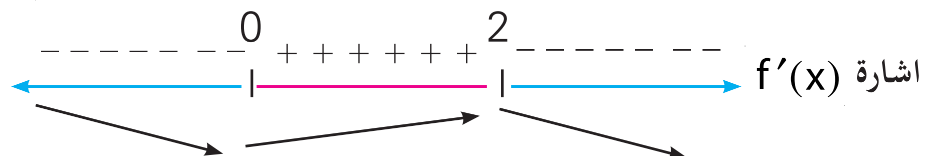
$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$f'(x) = -3x^2 + 6x$

$f'(x) = 0 \Rightarrow$

$-3x^2 + 6x = 0 \Rightarrow$

$-3x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 , x = 2$ حرجتان



$\therefore$ f تمتلك نهاية عظمى محلية عند $x = 2$

$\therefore$ النقطة $(2, 8)$ نهاية عظمى محلية و تحقق معادلة منحنى الدالة :

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + c$

$\therefore 8 = -8 + 12 + c \Rightarrow c = 4$

تمارين (3-4)

1. لتكن $f(x)=ax^2-6x+b$ حيث ان $a\in\{-4,8\}, b\in R$ جد قيمة a اذا كانت :
أ) الدالة f محدبة ب) الدالة f مقعرة .

2. اذا كانت (2,6) نقطة حرجة لمنحني الدالة $f(x)=a-(x-b)^4$ فجد قيمة $a,b\in R$
وبين نوع النقطة الحرجة.

3. اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$, $g(x)=1-12x$ وكان كل من g,f متماسان عند نقطة انقلاب المنحني f وهي (1 ,-11) فجد قيمة الثوابت $a,b,c\in R$.

4. اذا كانت 6 تمثل نهاية صغرى محلية لمنحني الدالة $f(x)=3x^2-x^3+c$ فجد قيمة $c\in R$
ثم جد معادلة مماس المنحني في نقطة انقلابه.

5. اذا كان $f(x)=ax^3+bx^2+cx$ وكانت f مقعرة $\forall x>1$ ومحدبة $\forall x<1$ وللدالة f نقطة نهاية عظمى محلية هي (-1,5) فجد قيمة الثوابت $a,b,c\in R$.

6. لتكن $f(x)=x^2-\frac{a}{x}$, $a\in R/\{0\}$, $x\neq 0$

برهن أن الدالة f لا تمتلك نهاية عظمى محلية.

7. المستقيم $3x-y=7$ يمس المنحني $y=ax^2+bx+c$ عند (2 , -1) وكانت له نهاية محلية عند $x=\frac{1}{2}$ جد قيمة $a,b,c\in R$ وما نوع النهاية.

[3-8] رسم المخطط البياني للدالة Graphing Function

ولكي نرسم المخطط البياني لدالة معطاة نتبع الخطوات الاتية :

1) نحدد أوسع مجال للدالة :

فاذا كانت الدالة حدودية (**Polynomial**) فإن أوسع مجال لها هو **R**

اما اذا كانت دالة نسبية $f(x)=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ فان اوسع مجال لها هو $\{x \in R : h(x) \neq 0\}$

2) نبين نوع التناظر للمنحني هل هومع محور الصادات أم مع نقطة الاصل؟

i) $f : A \to B$ متناظر حول محور الصادات $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in A\ \exists(-X) \in A \Rightarrow f(-x)=f(x)$$

ii) $f : A \to B$ متناظر حول نقطة الاصل $\Leftrightarrow$

$$\forall x \in A\ \exists(-X) \in A \Rightarrow f(-x)=-f(x)$$

3) نبين إن كان منحني الدالة يقطع المحورين أم لا؟

اي نجعل $x=\mathbf{0}$ ونجد قيمة y (ان امكن) فجد بذلك نقط التقاطع مع محور الصادات.

ونجعل $y=\mathbf{0}$ ونجد قيمة أو قيم x (ان امكن) فجد بذلك نقط التقاطع مع محور السينات

4) نجد المستقيمات المحاذية الأُفقية والعمودية في الدوال النسبية إن وجدت :

i) فاذا كانت $y=\dfrac{g(x)}{h(x)}$ نجعل $h(x)=\mathbf{0}$ ونجد قيم x

ولتكن $x=a$ فهي تمثل معادلة المستقيم المحاذي العمودي (**Vertical Asymptote**)

ii) واذا كانت $x=\dfrac{n(y)}{m(y)}$ نجعل $m(y)=\mathbf{0}$ ونجد قيمة (y) (ان امكن) ولتكن $y=\mathbf{b}$ فهي تمثل المحاذي الافقي

(**Horizontal Asymptote**)

5) نجد $f'(x)$, $f''(x)$ ومنهما نجد مناطق التزايد والتناقص والنقاط الحرجة ونوعها ومناطق التقعر والتحدب ونقط الانقلاب إن وجدت .

6) نجد نقط اضافية إن احتجنا الى ذلك ثم نرسم منحني الدالة .

مثال - 1-

ارسم بالاستعانة بمعلوماتك في التفاضل منحني الدالة : $f(x)=x^5$

الحل

(1) اوسع مجال = $\mathbf{R}$

(2) (0,0) نقطة التقاطع مع المحورين الإحداثيين.

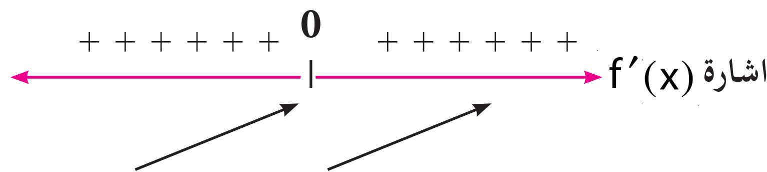
(3) المنحني متناظر حول نقطة الاصل لأن:

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R \Rightarrow f(-x)=(-x)^5$$
$$=-x^5$$
$$f(-x)=-f(x)$$

(4) المحاذيات : لا توجد لأن الدالة ليست نسبية.

(5) $f'(x)=5x^4$

$f'(x)=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow (0,0)$



f متزايدة في كل من $\{x : x>0\}$ ، $\{x : x<0\}$

$(0,0)$ نقطة حرجة لا تمثل نقطة نهاية.

$f''(x)=20x^3$

$f''(x)=0 \Rightarrow x=0$

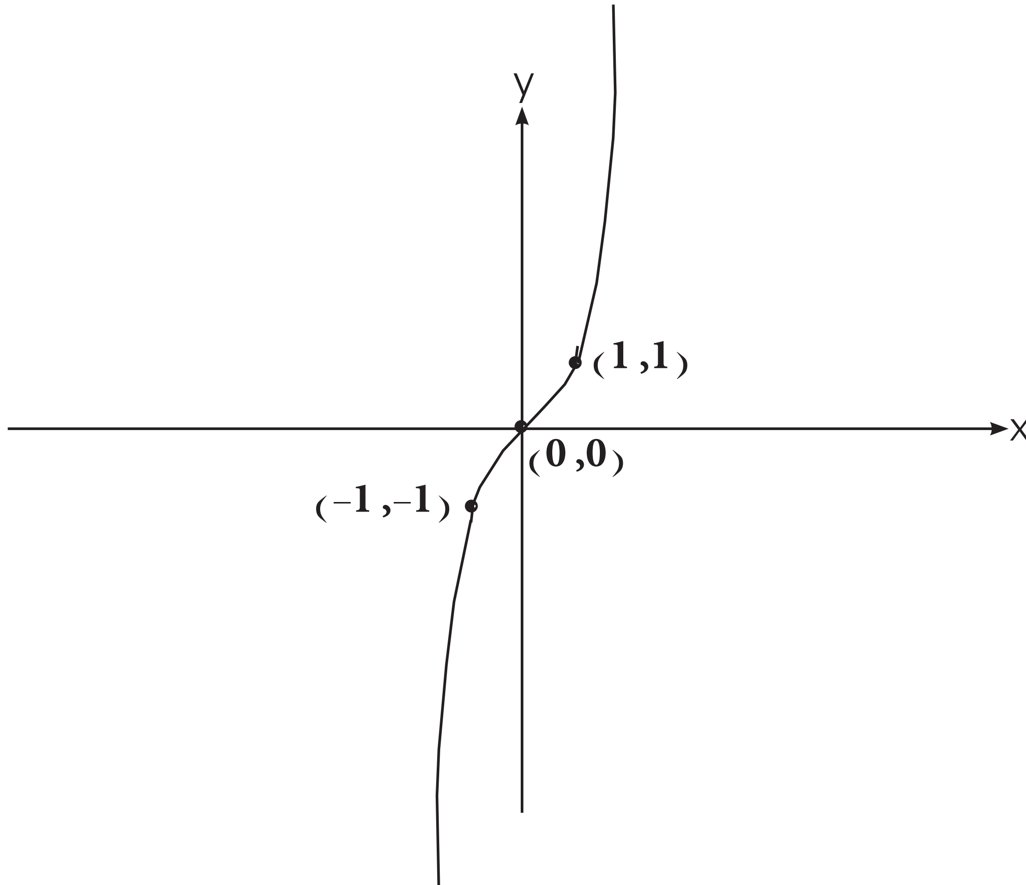


f مقعرة في $\{x : x>0\}$

f محدبة في $\{x : x<0\}$

$\therefore$ $(0,0)$ نقطة الانقلاب

x	0	1	−1	2	−2
y	0	1	−1	32	−32



مثال – 2– ارسم بالاستعانة بالتفاضل منحني الدالة : $y = x^3 - 3x^2 + 4$

الحل

1) اوسع مجال = R

2) التقاطع مع محور الصادات $x = 0 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow (0,4)$

3) التناظر

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R \Rightarrow f(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^2 + 4$$

$$= -x^3 - 3x^2 + 4 \neq f(x)$$

لا يوجد تناظر مع محور الصادات او نقطة الاصل لأن $f(x) \neq f(-x)$, $f(-x) \neq -f(x)$

4) المحاذيات لا توجد لأن الدالة ليست نسبية .

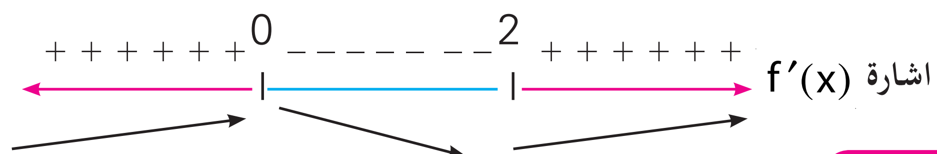
5)

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 4 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x = 0 \ , \ x = 2$$

$$f(0) = 4 \Rightarrow (0,4)$$

$$f(2) = 0 \Rightarrow (2,0)$$



f متزايدة في كل من $\{x : x > 2\}$, $\{x : x < 0\}$

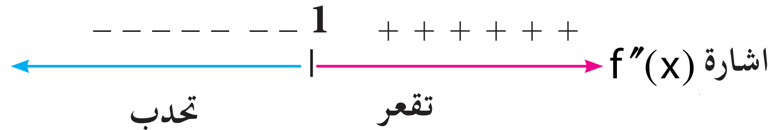
f متناقصة في الفترة $(0 , 2)$

$\therefore$ $(0, 4)$ نقطة نهاية عظمى محلية ، $(2 , 0)$ نقطة نهاية صغرى محلية .

$f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

$f(1) = 2 \Rightarrow (1, 2)$



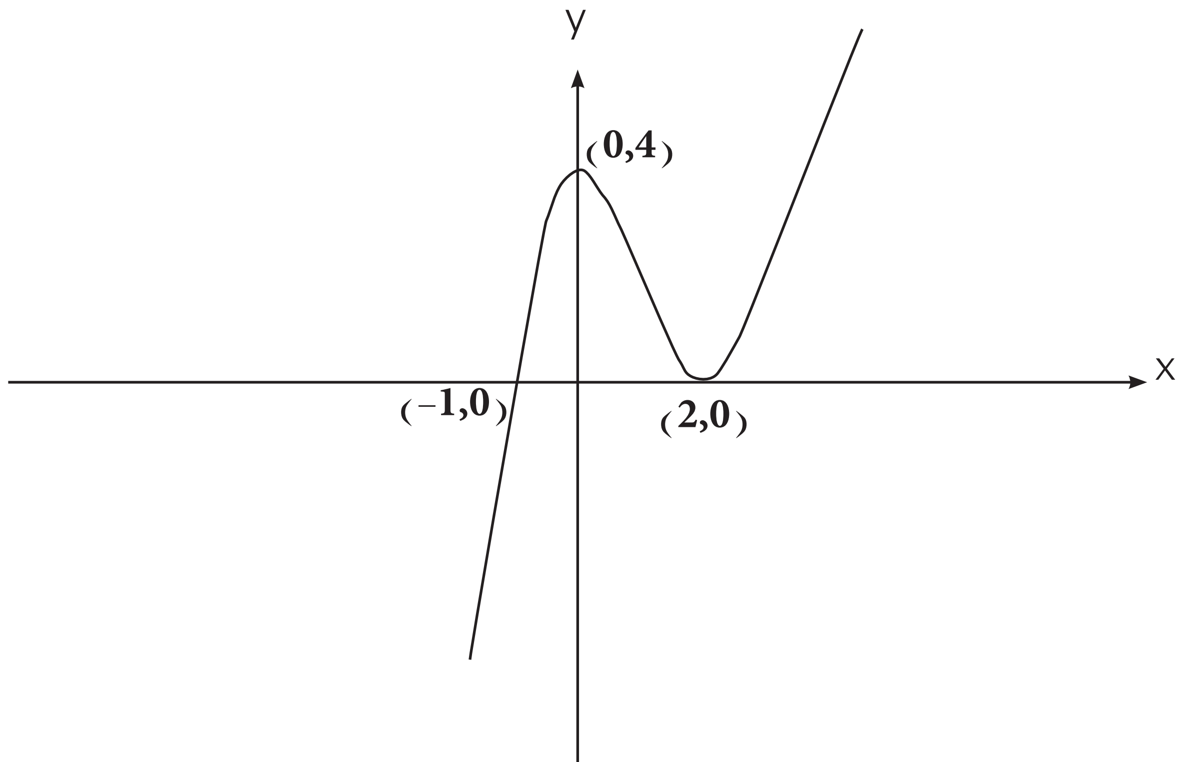
f مقعرة في $\{x : x > 1\}$

f محدبة في $\{x : x < 1\}$

$\therefore$ $(1, 2)$ نقطة انقلاب .

6) الجدول

x	0	1	2	3	-1
y	4	2	0	4	0



مثال -3-

بالاستعانة بالتفاضل ارسم منحني الدالة : $f(x)=\frac{3x-1}{x+1}$

الحل

1) اوسع مجال للدالة : $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

∴ اوسع مجال للدالة هو $R-\{-1\}$

2) بما أن 1 ينتمي الى مجال الدالة لكن (-1) لاينتمي الى مجال الدالة لذلك فالمنحني غير متناظر مع محور الصادات وغير متناظر مع نقطة الاصل .

3) نقاط التقاطع مع المحورين الاحداثيين:

$x=0 \Rightarrow y=-1 \Rightarrow (0,-1),$

$y=0 \Rightarrow \frac{3x-1}{x+1}=0 \Rightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow (\frac{1}{3},0)$ هما نقطتا التقاطع مع المحورين

4) المستقيم المحاذي الشاقولي $x+1=0 \Rightarrow x=-1$

$f(x)=y=\frac{3x-1}{x+1} \Rightarrow$

$yx+y=3x-1 \Rightarrow yx-3x=-1-y$

$x(y-3)=-1-y \Rightarrow x=\frac{-1-y}{y-3}$

$y-3=0 \Rightarrow y=3$ المستقيم المحاذي الافقي

5)

$$f'(x)=\frac{(x+1)(3)-(3x-1)(1)}{(x+1)^2}$$

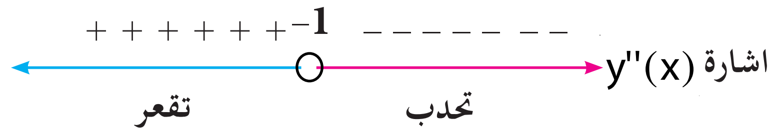
$$=\frac{3x+3-3x+1}{(x+1)^2}=\frac{4}{(x+1)^2}$$

اشارة $f'(x)$ + + + + + + -1 + + + + + +

$\forall x \in R-\{-1\}$ ، $f'(x)>0$

الدالة متزايدة في $\{x:x<-1\}$, $\{x:x>-1\}$ ولاتوجد نقاط حرجة.

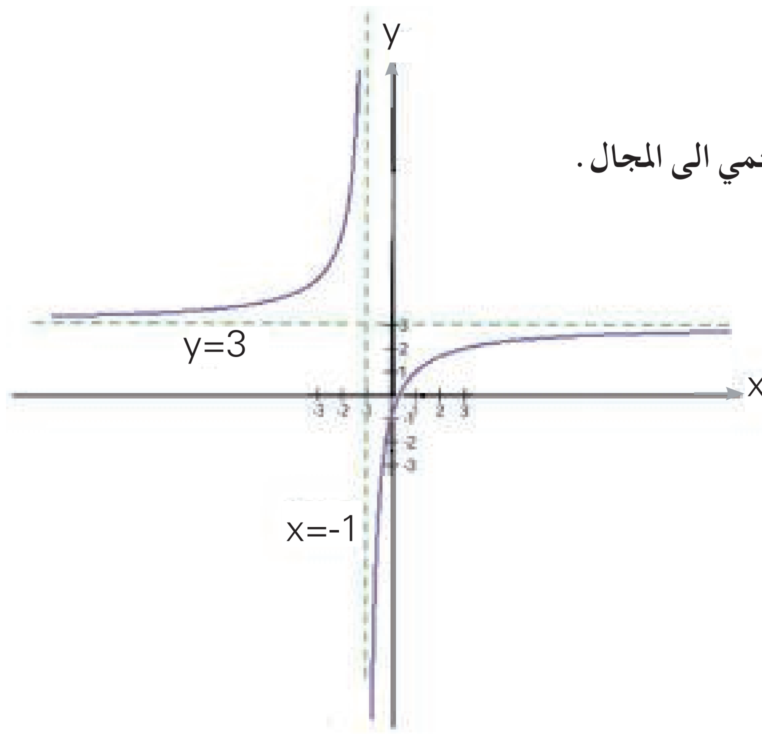
$$f'(x)=4(x+1)^{-2} \Rightarrow f''(x)=-8(x+1)^{-3}(1)=\frac{-8}{(x+1)^3}$$



الدالة مقعرة في $\{x: x<-1\}$

الدالة محدبة في $\{x: x>-1\}$

الدالة لاتمتلك نقطة انقلاب لان (-1) لا ينتمي الى المجال .



مثال - 4- باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني :

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2+1}$$

الحل

1) اوسع مجال للدالة $=R$

2) نقاط التقاطع مع المحورين : عندما $x=0$ فإن $y=0$ وبالعكس .

$\therefore$ ($0 , 0$) نقطة التقاطع مع المحورين .

3) التناظر :

$$\forall x \in R, \exists(-x) \in R$$

$$f(-x)=\frac{(-x)^2}{(-x)^2+1}=\frac{x^2}{x^2+1}=f(x)$$

$\therefore$ المنحني متناظر حول محور الصادات

4) المحاذيات :

لذلك لايوجد محاذي عمودي

$$x^2+1\neq 0$$

$$f(x)=y=\frac{x^2}{x^2+1}\Rightarrow yx^2+y=x^2$$

$$x^2(y-1)=-y\Rightarrow x^2=\frac{-y}{y-1}$$

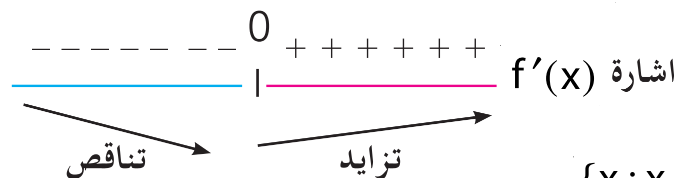
$$y-1=0\Rightarrow y=1$$

∴ المستقيم المحاذي الافقي

5)

$$f'(x)=\frac{(x^2+1)(2x)-x^2(2x)}{(x^2+1)^2}=\frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x}{(x^2+1)^2}=0\Rightarrow x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$$



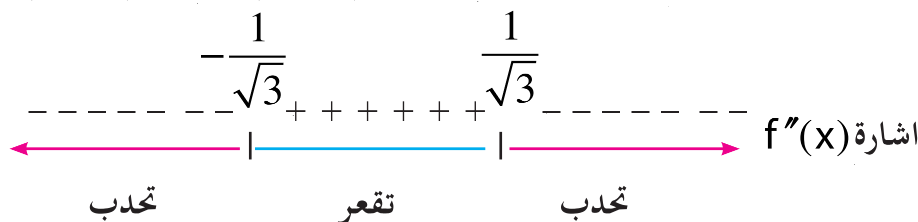
$f(x)$ متزايدة في $\{x:x>0\}$

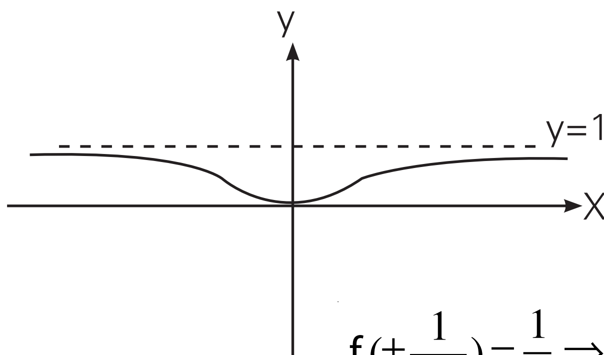
$f(x)$ متناقصة في $\{x:x<0\}$

(0,0) نقطة نهاية صغرى محلية

$$f''(x)=\frac{(x^2+1)^2(2)-2x(2)(x^2+1)(2x)}{(x^2+1)^4}$$

$$=\frac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\frac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=0\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$





f (x) محدبة في $\{x:x<-\frac{1}{\sqrt{3}}\},\{x:x>\frac{1}{\sqrt{3}}\}$

f (x) مقعرة في الفترة المفتوحة $(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

نقطتا الانقلاب هما :

$$f(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{4}\Rightarrow(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4}),(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{4})$$

تمارين (3-5)

أرسم بأستخدام معلوماتك في التفاضل الدوال التالية :

1) $f(x) = 10 - 3x - x^2$

2) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

3) $f(x) = (1 - x)^3 + 1$

4) $f(x) = 6x - x^3$

5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$

6) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1}$

7) $f(x) = (x + 2)(x - 1)^2$

8) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

9) $f(x) = 2x^2 - x^4$

10) $f(x) = \dfrac{6}{x^2 + 3}$

[3-9] تطبيقات عملية على القيم العظمى او الصغرى.

ظهرت في القرن السابع عشر الكثير من الاسئلة دفعت الى تطور حساب التفاضل والتكامل ومن امثلة ذلك المسائل التي وردت في بحوث الفيزياء مثل اقصى ارتفاع تصله قذيفة اطلقت بزوايا مختلفة ، او اقصى ارتفاع يصله جسم مقذوف شاقولياً الى اعلى اواقل زمن وأقل كلفة ومسائل من الصناعات مثل أقل مساحة وأكبر حجم وأقل محيط ، ... الخ .

ولحل هذه المسائل نتبع الخطوات الآتية :

1 . نرسم مخططاً للمسألة (إن امكن) ونعين عليه الأجزاء المهمة في المسألة .
2 . نكوِّن الدالة المراد ايجاد قيمتها العظمى او الصغرى ونحدد مجالها على ان تكون في متغير واحد .
3 . اذا كان المجال فترة مغلقة نجد الاعداد الحرجة وقيم الدالة في اطراف الفترة وفي الاعداد الحرجة . فأيّها اكبر هي القيمة العظمى وأيّها أصغر هي القيمة الصغرى.

مثال -1-

جد العدد الذي اذا اضيف الى مربعه يكون الناتج اصغر ما يمكن .

الحل

ليكن العدد $= x$

$\therefore$ مربع العدد $= x^2$

ولتكن $f(x) = x + x^2$

$$f'(x) = 1 + 2x,\ f''(x) = 2 > 0$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

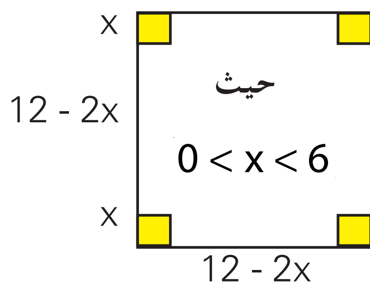
$$f''(-\frac{1}{2}) = 2 > 0$$

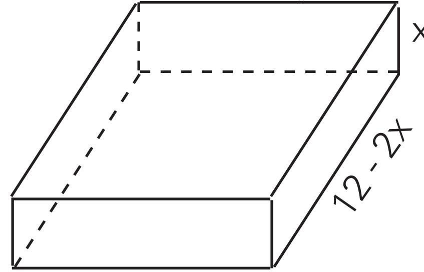
$\therefore$ توجد نهاية صغرى محلية عند $x = -\frac{1}{2}$

$\therefore$ العدد هو $\left(-\frac{1}{2}\right)$.

مثال – 2 –

صنع صندوق مفتوح من قطعة من النحاس مربعة الشكل طول ضلعها **12cm** وذلك بقص أربعة مربعات متساوية الأبعاد من أركانها الأربعة ثم ثني الأجزاء البارزة منها . ما هو الحجم الأعظم لهذة العلبة ؟





الحل

نفرض طول ضلع المربع المقطوع يساوي **x cm**

∴ أبعاد الصندوق هي : $12-2x \quad ;12-2x; \quad x$

الحجم = حاصل ضرب أبعاده الثلاثة :

$$v=(12-2x)(12-2x)(x)$$

$$V = f(x) = x(144-48x+4x^2)$$

$$V = f(x) = 144x-48x^2+4x^3$$

$$\frac{dv}{dx} = f'(x) = 144-96x+12x^2 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = 0 \Rightarrow 0=12(12-8x+x^2) \Rightarrow 12(6-x)(2-x)=0$$

النقط الحرجة $x=6$ ، $x=2$

لاحظ من الشكل أن **6** يهمل لانه غير معقول

عند **2** توجد نهاية عظمى للحجم وتساوي $v= f(2)=2(12-4)^2 =128cm^3$

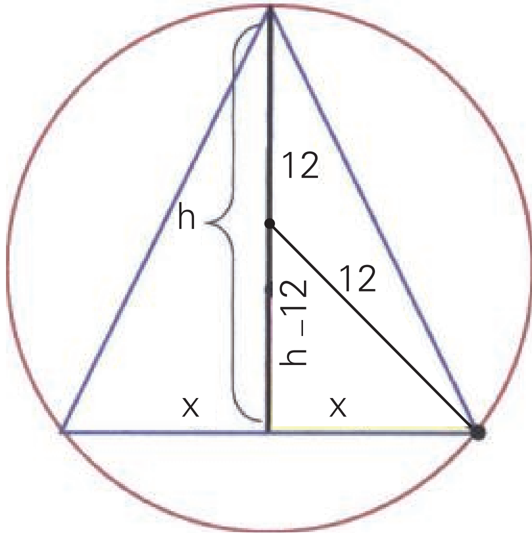
مثال -3-

جد بعدي أكبر مثلث متساوي الساقين يمكن أن يوضع داخل دائرة نصف قطرها **12cm**

ثم برهن أن نسبة مساحة المثلث إلى مساحة الدائرة كنسبة $\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$

الحل

نفرض بعدي المثلث : **h** , $b = 2x$ قاعدة المثلث (المتغيرات)



لنجد علاقة بين المتغيرات :

مبرهنة فيثاغورس : $x^2 + (h-12)^2 = 144$

$$x^2 + h^2 - 24h + 144 = 144$$

$$x^2 = 24h - h^2$$

$$\boxed{x = \sqrt{24h - h^2}}$$

الدالة : (مساحة المثلث)

$$A = \frac{1}{2}(b)(h)$$

$$A = \frac{1}{2}(2x)(h) = hx$$

التعويض :

$$A = f(h) = h\sqrt{24h - h^2}$$

لاحظ المجال : $0 \le h \le 24$ وهذا يعني أن **h** موجبة فيمكن توحيد الجذر

$$A = f(h) = \sqrt{h^2(24h - h^2)}$$

$$A = f(h) = \sqrt{24h^3 - h^4}$$

المشتقة

$$\frac{dA}{dh} = f'(h) = \frac{72h^2 - 4h^3}{2\sqrt{24h^3 - h^4}}$$

نجد النقطة الحرجة لدالة المساحة

وعندما

$$f'(h) = 0 \Rightarrow 72h^2 - 4h^3 = 0$$

$$4h^2(18 - h) = 0 \Rightarrow h = 18cm$$

∴ الارتفاع $h=18$ cm

$$x=\sqrt{24h-h^2} \Rightarrow x=\sqrt{24(18)-18^2}$$

$$x=\sqrt{18(24-18)}=\sqrt{18(6)}=6\sqrt{3}cm$$

طول القاعدة $b=2x=12\sqrt{3}cm$

مس الدائرة : $A_1=\pi r^2 \Rightarrow A_1=\pi(12)^2=144\pi \quad cm^2$

مس المثلث : $A_2=\frac{1}{2}bh \Rightarrow A_2=6\sqrt{3}(18)=108\sqrt{3}cm^2$

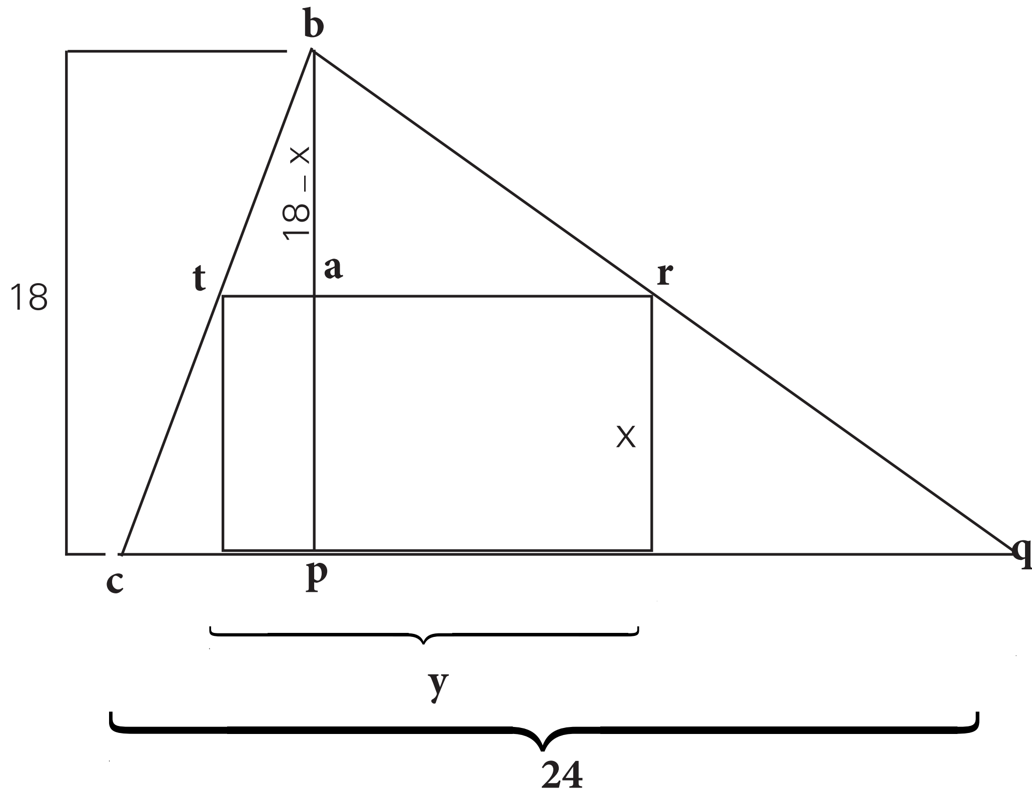
$$\frac{\text{مساحة المثلث}}{\text{مساحة الدائرة}}=\frac{A_2}{A_1}=\frac{108\sqrt{3}}{144\pi}=\frac{3\sqrt{3}}{4\pi}$$

مثال -4-

جد بعدي أكبر مستطيل يمكن أن يوضع داخل مثلث طول قاعدته **24cm** وارتفاعه **18cm** بحيث أن رأسين متجاورين من رؤوسه تقعان على القاعدة والرأسين الباقيين تقعان على ساقيه .

الحل

- نفرض طول كل من بعدي المستطيل : x,y **cm**



العلاقة بين المتغيرات : المثلثان : **bcq , btr** متشابهان لتساوي زواياهما المتناظرة لذا تتناسب أضلاعهما المتناظرة وكذلك ارتفاعاهما .

$$\frac{tr}{cq}=\frac{ba}{bp}\Rightarrow\frac{y}{24}=\frac{18-x}{18}$$

$$\Rightarrow y=\frac{24}{18}(18-x)\Rightarrow \boxed{y=\frac{4}{3}(18-x)}$$

الدالة : مساحة المستطيل = حاصل ضرب بعدية $A=xy \Leftarrow$

التحويل بدلالة متغير واحد : $A=x\frac{4}{3}(18-x)$

التبسيط قبل المشتقة : $f(x)=A=\frac{4}{3}(18x-x^2)$

نجد النقط الحرجة : $f'(x)=\frac{4}{3}(18-2x)$

$$f'(x)=0\Rightarrow x=9$$

$$f''(x)=\frac{4}{3}(-2)=-\frac{8}{3}$$

$$f''(9)=-\frac{8}{3}<0$$

وهذا يعني لدالة المساحة نهاية عظمى محلية عند **x= 9 cm** ويمثل أحد البعدين .

البعد الآخر $y=\frac{4}{3}(18-x) \Rightarrow y=\frac{4}{3}(18-9)=12\ \text{cm}$

مثال -5-

مجموع محيطي دائرة ومربع يساوي **60cm** أثبت أنه عندما يكون مجموع مساحتي الشكلين أصغر ما يمكن فإن طول قطر الدائرة يساوي طول ضلع المربع .

الحل

الفرضية : نفرض نصف قطر الدائرة = **r cm** ونفرض طول ضلع المربع = **x cm**

العلاقة : محيط المربع + محيط الدائرة = **60 cm**

$$\therefore 60=4x+2\pi r \Rightarrow$$

$$r=\frac{1}{\pi}(30-2x)$$

الدالة هي : مساحة الدائرة + مساحة المربع

التحويل لمتغير واحد : $A=x^2+\pi\left[\frac{1}{\pi}(30-2x)\right]^2$

$$A=f(x)=x^2+\frac{1}{\pi}\left(900-120x+4x^2\right)$$

نشتق : $f'(x)=2x+\frac{1}{\pi}(-120+8x)$

وعندما $f'(x)=0 \Rightarrow 0=2x+\frac{1}{\pi}(-120+8x)$

$$0=\pi x+4x-60 \Rightarrow 60=\pi x+4x$$

$$x(\pi + 4) = 60 \Rightarrow x = \frac{60}{\pi + 4} \text{ cm}$$

$$\therefore r = \frac{1}{\pi}(30 - \frac{120}{\pi + 4}) \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4} \text{ cm} \Rightarrow x = 2r$$

الدالة تمتلك نهاية صغرى محلية $f''(x) = 2 + \frac{1}{\pi}(8) > 0$

(و . هـ . م)

مثال- 6

جد نقطة أو نقاط تنتمي للقطع الزائد $y^2 - x^2 = 3$ بحيث تكون أقرب ما يمكن للنقطة $(0,4)$

الحل

نفرض أن النقطة $p(x,y)$ هي من نقط المنحني $y^2 - x^2 = 3$ فتحقق معادلته .

$$\therefore x^2 = y^2 - 3 \quad \ldots (1)$$

$$s = \sqrt{(x-0)^2 + (y-4)^2}$$

$$\therefore s = \sqrt{x^2 + y^2 - 8y + 16} \quad \ldots (2)$$

بالتعويض من المعادلة 1 في 2 ينتج :

$$s = f(y) = \sqrt{2y^2 - 8y + 13}$$

$$f'(y) = \frac{4y - 8}{2\sqrt{2y^2 - 8y + 13}}$$

$$f'(y) = 0 \Rightarrow 4y - 8 = 0 \Rightarrow y = 2$$

$$\because x^2 = y^2 - 3$$

$$\therefore x^2 = 4 - 3 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$$

$$\Rightarrow (1,2), (-1,2)$$

تمارين (6-3)

1 . جد عددين موجبين مجموعهما 75 وحاصل ضرب أحدهما في مربع الاخر أكبر ما يمكن .

2 . جد ارتفاع اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل كرة نصف قطرها $4\sqrt{3}cm$.

3 . جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل نصف دائرة نصف قطرها $4\sqrt{2}cm$.

4 . جد اكبر مساحة لمثلث متساوي الساقين طول كل من ساقيه $8\sqrt{2}cm$.

5 . جد اقل محيط ممكن للمستطيل الذي مساحته $16\ cm^2$.

6 . جد حجم اكبر مخروط دائري قائم يمكن وضعه داخل كرة نصف قطرها 3 cm .

7 . جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (6,8) والذي يصنع مع المحورين في الربع الاول أصغر مثلث .

8 . جد بعدي اكبر مستطيل يوضع داخل المنطقة المحددة بالدالة $f(x)=12-x^2$ ومحور السينات ، رأسان من رؤوسه على المنحني والرأسان الاخران على محور السينات ثم جد محيطه .

9 . جد ابعاد اكبر اسطوانة دائرية قائمة توضع داخل مخروط دائري قائم ارتفاعه 8cm وطول قطر قاعدته 12cm .

10 . جد اكبر حجم لمخروط دائري قائم ناتج من دوران مثلث قائم الزاوية طول وتره $6\sqrt{3}$ cm دورة كاملة حول احد ضلعيه القائمين .

11 . علبة اسطوانية الشكل مفتوحة من الأعلى سعتها $(125\pi)\ cm^3$ جد أبعادها عندما تكون مساحة المعدن المستخدم في صنعها اقل مايمكن .

12 . خزان على شكل متوازي سطوح مستطيلة طول قاعدته ضعف عرضها فاذا كانت مساحة المعدن المستخدم في صناعته $108\ m^2$ جد ابعاد الخزان لكي يكون حجمه اكبر ما يمكن علماً ان الخزان ذو غطاء كامل .

4

الفصل الرابع

Chapter Four

Integration التكامل

[4-1] المناطق المحددة بمنحنيات

[4-2] المجاميع العليا والمجاميع السفلى.

[4-3] تعريف التكامل.

[4-4] النظرية الاساسية للتكامل - الدالة المقابلة.

[4-5] خواص التكامل المحدد .

[4-6] التكامل غير المحدد .

[4-7] اللوغاريتم الطبيعي.

[4-8] إيجاد مساحة منطقة مستوية.

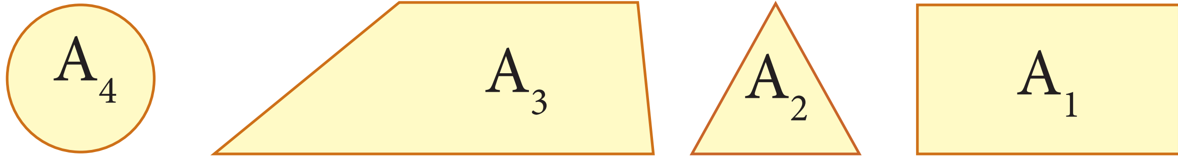
[4-9] إيجاد حجم جسم ناشئ من دوران منطقة مستوية.

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
تجزئة الفترة $[x_0, x_n]$	$\sigma = (x_0, x_1, x_2 .... x_n)$
المجموع الاسفل	$L(\sigma, f)$
المجموع الاعلى	$U(\sigma, f)$
المجموع	$\sum$
سيكما	σ

[4-1] المناطق المحددة بمنحنيات .

Regions Bounded by Curves.

تعرفت من دراستك السابقة على مناطق مستوية مختلفة مثل الذي تراه في الشكل (4 - 1) :



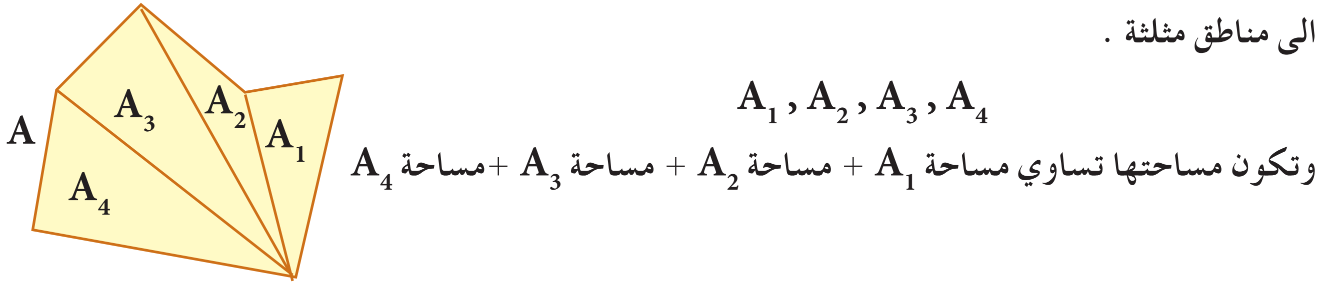
الشكل (4-1)

حيث A_1 منطقة مستطيلة و A_2 منطقة مثلثة و A_3 منطقة شبه منحرف و A_4 منطقة دائرية ولاشك أنك تعرف إيجاد مساحات هذه المناطق .

أما المنطقة A كما في الشكل (4 - 2) والتي تسمى منطقة مضلعة فيمكنك حساب مساحتها بتقسيمها الى مناطق مثلثة .

A_1 , A_2 , A_3 , A_4

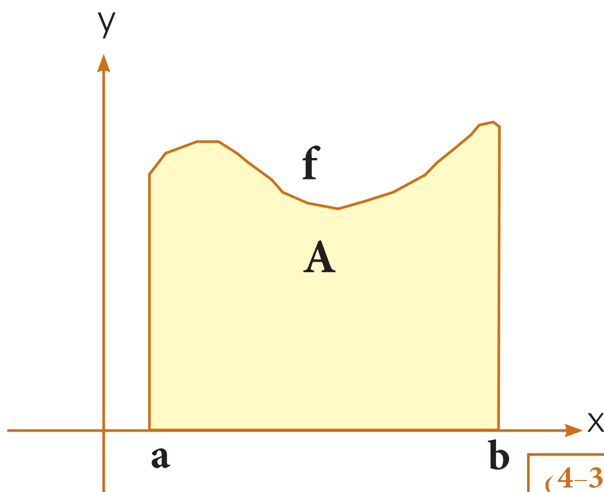
وتكون مساحتها تساوي مساحة A_1 + مساحة A_2 + مساحة A_3 +مساحة A_4



الشكل (4-2)

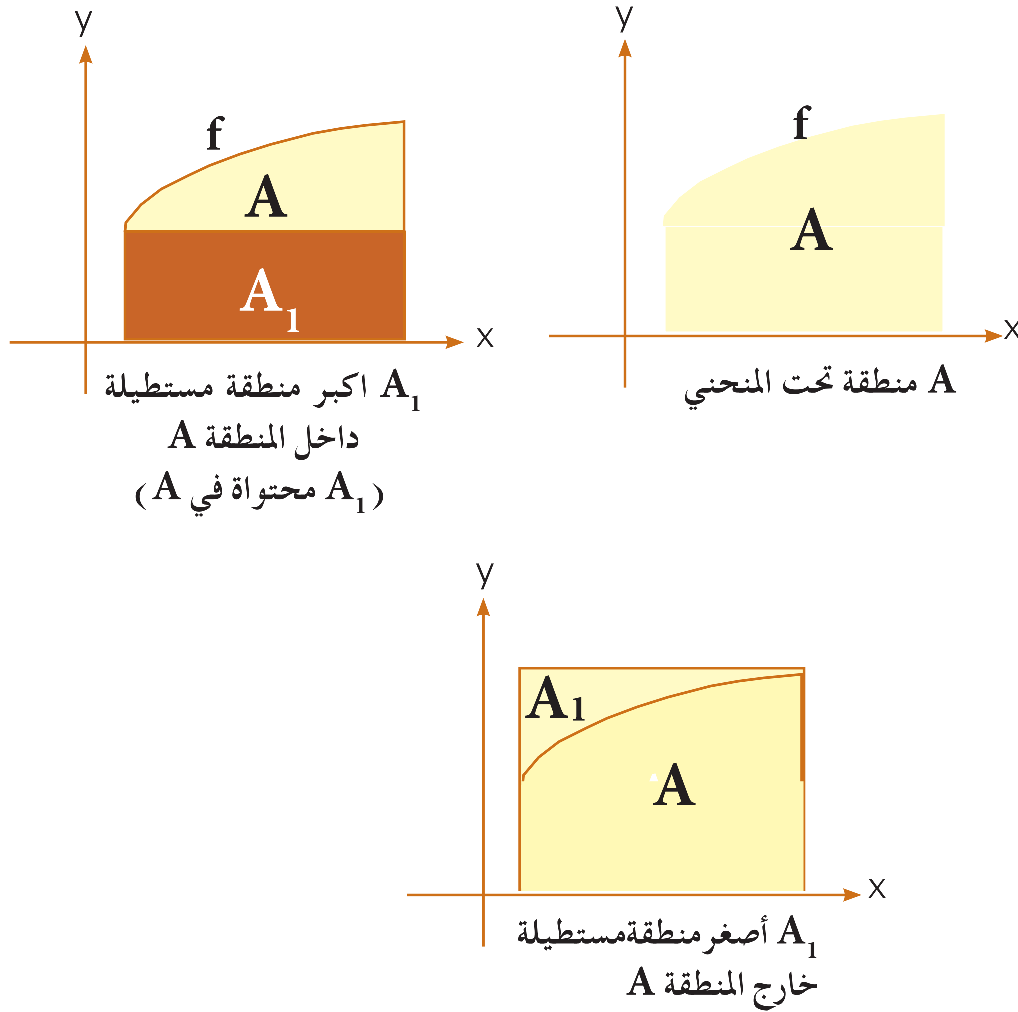
وبالطريقة نفسها يمكننا ايجاد مساحة اي منطقة مضلعة بعد أن نقسمها الى مناطق مثلثة أو مربعة أو مستطيلة ، . . . .

اما المنطقة A في الشكل (4 - 3) والتي تسمى منطقة تحت المنحني f وهي مجموعة النقاط المحصورة بين المنحني (بيان الدالة f) والمستقيمين $x = a$, $x = b$ ومحور السينات فلا يمكن تقسيمها الى مناطق معلومة لديك مثل (مثلث ، مربع ، مستطيل ، دائرة ، . . .) فكيف يمكنك حساب مساحتها ؟



الشكل (4-3)

تسميات :



الشكل (4-4)

ملاحظة

1. مساحة أي منطقة مستوية هي عدد حقيقي غير سالب .
2. إذا كانت $A' \subseteq A$ فان مساحة المنطقة $A' \leq$ مساحة المنطقة A.

لاحظ الشكل (4 – 5)



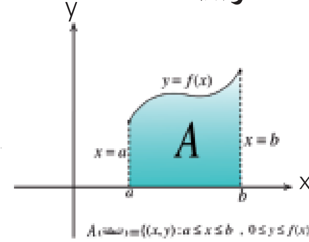
الشكل (4-5)

إيجاد قيمة تقريبية لمساحة منطقة مستوية :

مثال -1-

في الشكل (6 – 4) ، **A** هي المنطقة تحت منحنى الدالة المستمرة **f** , أوجد قيمة تقريبية لمساحة هذه المنطقة حيث :

$$A=\{(x,y): 2\le x\le 5 \ , \ y\le \sqrt{x-1}\} \text{ (المنطقة)}$$



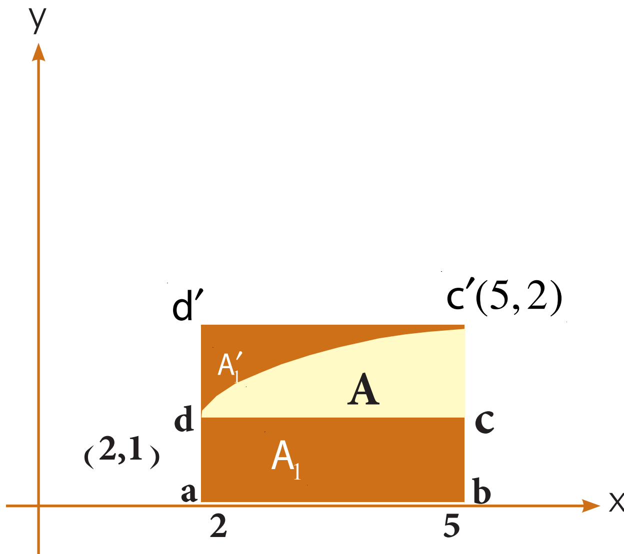
الحل

نحدد داخل المنطقة **A** اكبر منطقة مستطيلة (**a b c d**) بحيث تكـون قاعـدتهـا من **x=2** الى **x=5**

ولتكـن A_1 حيـث $A_1 \subseteq A$ وعليـه تكــون مســاحـة هــذه المنطقـة

$A_1 = ab \times ad = (5-2)\times 1 = 3 \text{ uint}^2$

كذلك نحـدد خـارج المنطقـة أصغر منطقة مستطيلـة $(abc'd')$ ولتكـن A_1' حيـث $A \subseteq A_1'$ بحيث تكون قاعدتها من **x=2** الى **x=5** فتكون مساحة A_1' تساوي :



الشكل (6–4)

$$A_1' = ab \times ad' = (5-2)\times 2 = 6\text{unit}^2$$

بما ان $A_1 \subseteq A \subseteq A_1'$

∴ مساحة A_1 ≥ مساحة A ≥ مساحة A_1'

3≤ مساحة المنطقة A ≤6

فتكون القيمة التقريبية الاولى لمساحة المنطقة **A** تساوي $\dfrac{3+6}{2} = 4\dfrac{1}{2}\text{unit}^2$

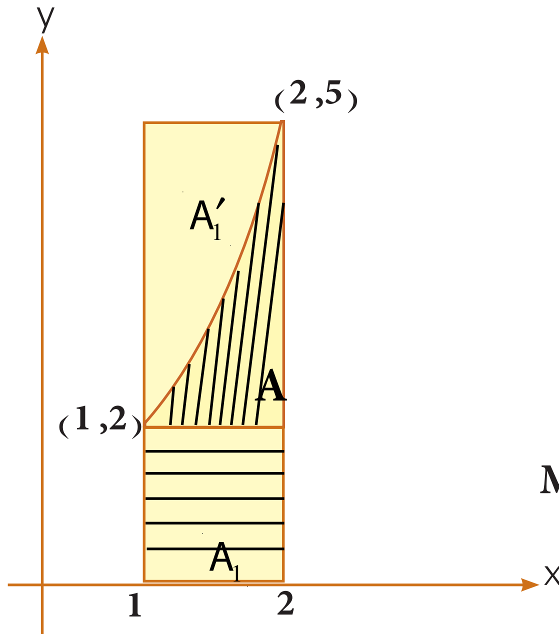
ملاحظة

لاحظ في المثال 1 ان A_1 هي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها (ad) يساوي اصغر قيمة للدالة في [2 ,5] وسنرمز لها بالرمز (m) اما A'_1 فهي المنطقة المستطيلة التي ارتفاعها ad' يساوي اكبر قيمة للدالة في [2 ,5] وسنرمز لها (M) وكما تعرفت في فصل التفاضل فان(m) (اصغر قيمة للدالة المستمرة على [a,b]) وكذلك (M) (اكبر قيمة للدالة المستمرة على [a,b]) نبحث عنهما عند احد طرفي الفترة [a,b] أو عند النقطة الحرجة ان وجدت .

مثال - 2- $A = \{(x,y): 1 \le x \le 2,\ \ y = x^2 + 1$

اوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة **A** .

الحل



الشكل (4-7)

A_1 اكبر منطقة مستطيلة داخل **A** (محتواة في **A**)

قـاعدتها من **x=1** الى **x=2** وارتفاعـها $m = 2$

هي $A_1 = 2(2-1) = 2$ unit ^{2}

A'_1 اصغر منطقة مستطيلة خارج **A** (تحتوي **A**)

قـاعدتها ايضـاً من **x=1** الى **x=2** وارتفاعهـا $M = 5$

$A'_1 = 5(2-1) = 5$ unit ^{2}

بما ان $A_1 \subseteq A \subseteq A'_1$

$\therefore$ مساحة المنطقة $A_1 \le$ مساحة منطقة $A \le$ مساحة منطقة A'_1

$\therefore$ $2 \le$ مساحة $A \le 5$

فتكون القيمة التقريبية لمساحة **A** تساوي unit ^{2} $\dfrac{A_1 + A'_1}{2} = \dfrac{2+5}{2} = 3\dfrac{1}{2}$

مساحة منطقة مستوية بدقة اكبر:

تمهيد : لنفرض ان مع مهند 19000 ديناراً وأراد حسام ان يعرف هذا المبلغ فكان الحوار الاتي بينهما :

حسام : كم معك من الدنانير ؟

مهند : قدّر المبلغ بنفسك علماً بأنه بين عشرة آلاف وعشرين الفاً .

حسام : أتوقع ان يكون معك 15000 ديناراً أي $15000 = \dfrac{20000+10000}{2}$.

مهند : اقتربت قليلاً ولكن ألمحّ لك اكثر فالمبلغ الذي معي بين 15000 ، 20000 دينار .

حسام : اذاً في حدود 17500 دينار اي $17500 = \dfrac{20000+15000}{2}$.

مهند : هذه القيمة اكثر دقة من القيمة الاولى لان القيمة الصحيحة 19000 دينار .

من هذا المثال نستنتج الأتي :

في المحاولة الاولى : 10000 > المبلغ > 20000 وكان الخطأ في القيمة التقريبية الاولى :

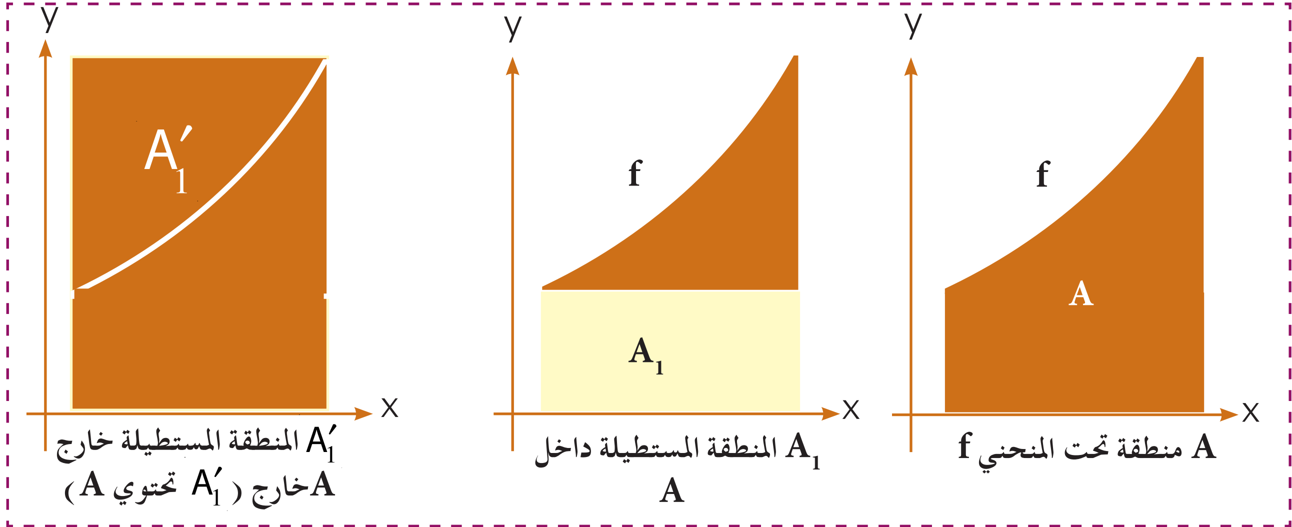
$$19000 - 15000 = 4000$$

في المحاولة الثانية : 15000 > المبلغ > 20000 كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ومقدار الخطأ :

$$19000 - 17500 = 1500$$

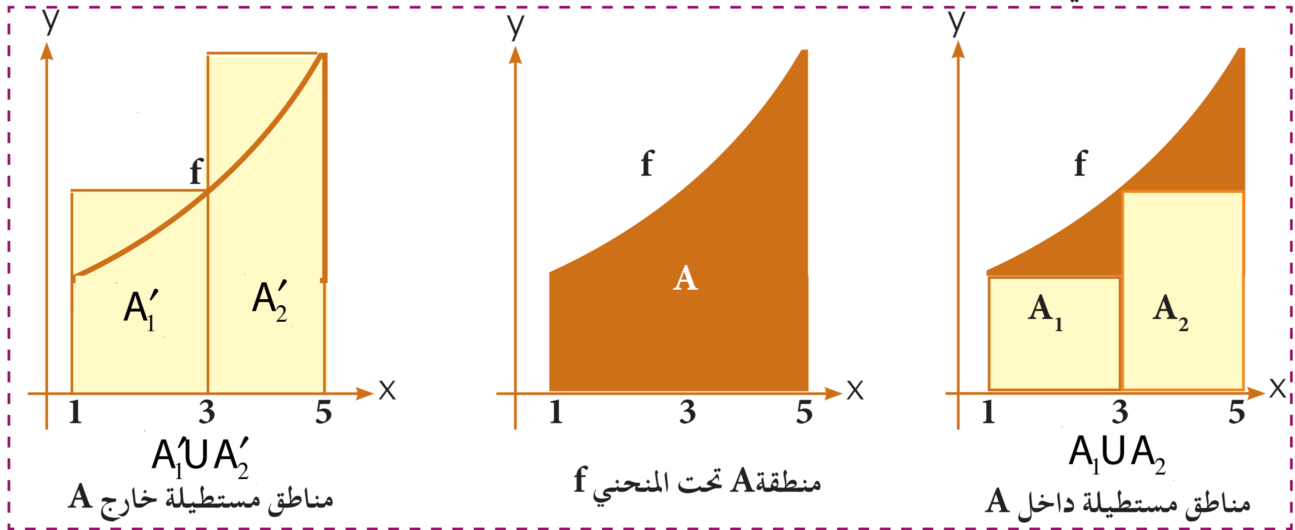
اذاً كلما استطعنا ان نجعل الفرق بين الحدين الاعلى والادنى اقل كانت القيمة التقريبية اكثر دقة ، وهكذا لحساب مساحة منطقة A بدقة اكبر نحاول ان نجعل مقدار هذه المساحة بين حدين بحيث يكون الفرق بينهما اقل ما يمكن .

والحدين الاعلى والادنى هما مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية (المحتواة في A)، ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A والاشكال (8 – 4) ، (9 – 4) ، (10 – 4) توضح هذه الفكرة .



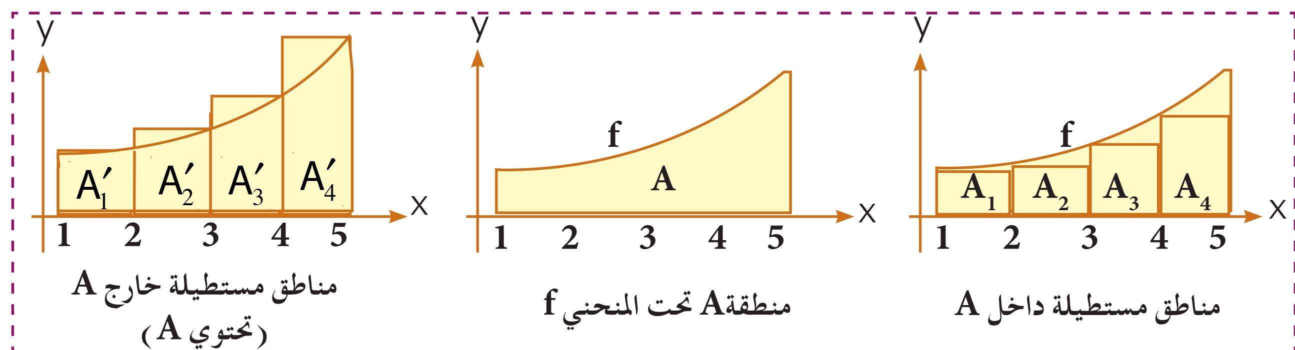
الشكل (4-8)

لاحظ ان هناك فرقاً واضحاً بين مساحة A_1 ومساحة A'_1 حيث مساحة A_1 أصغر بكثير من مساحة A ,
اما مساحة A'_1 فهي اكبر كثيراً من مساحة A .



الشكل (4-9)

في الشكل (4 – 10) تجزأت القاعدة [1 , 5] الى أربعة فترات جزئية .



الشكل (4-10)

ملاحظة (1

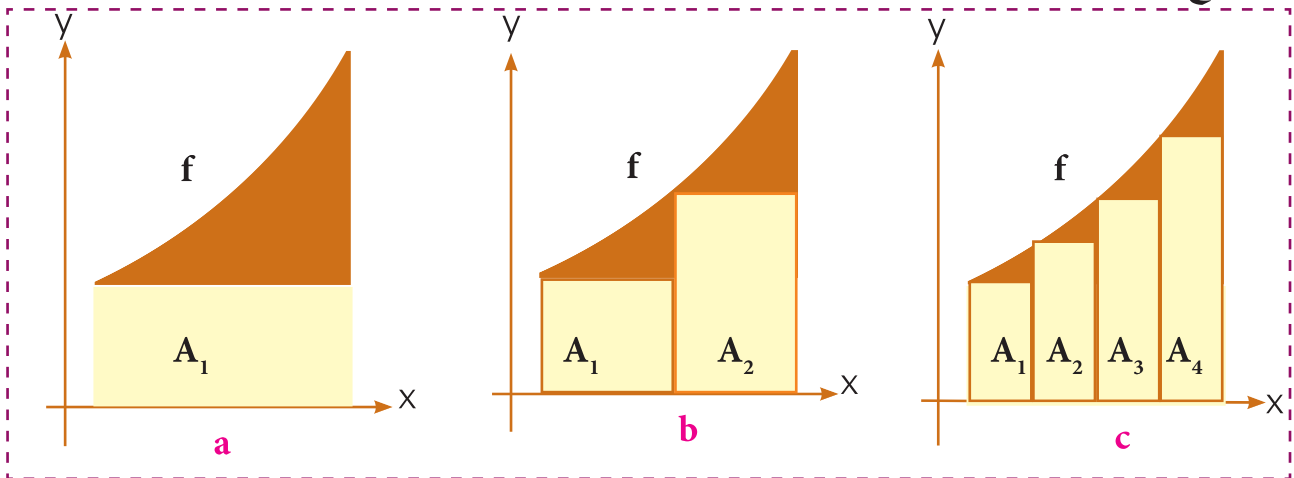
في الشكل (9 – 4) تجزأت الفترة الى فترتين جزئيتين هما [1 ,3], [3 ,5] , في مثل هذه الحالة تسمي الثلاثية المرتبة (1 ,3 ,5) تجزيئاً (partition) للفترة [1 ,5] ويرمز لها بالرمز σ اي σ =(1 ,3 ,5)

وبصورة عامة اذا كانت لدينا [a,b] واردنا ان نجزئها الى n من الفترات المنتظمة فان طول الفترة حيث $h=\frac{b-a}{n}$.

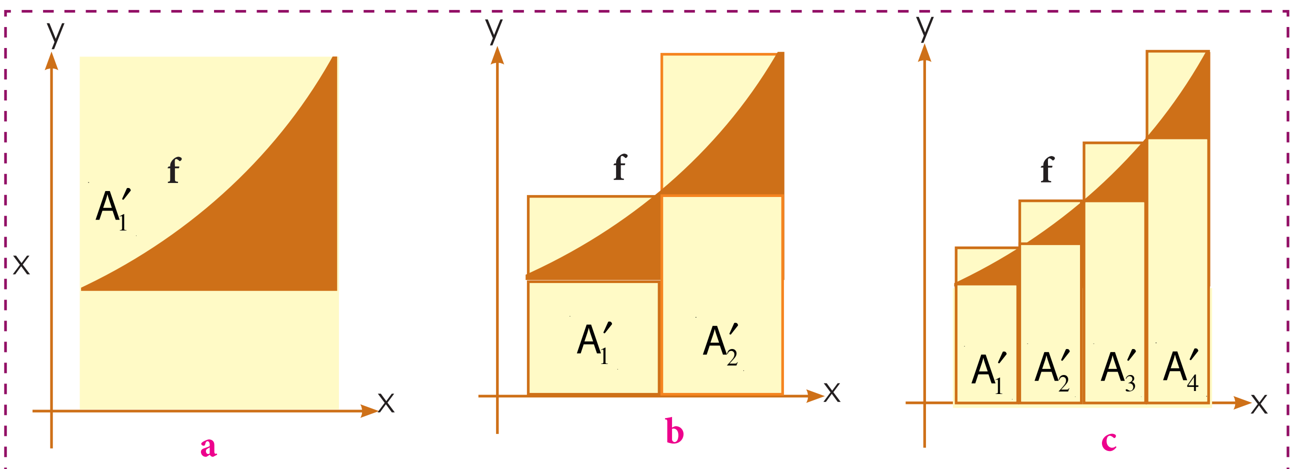
ملاحظة (2

انظر الى الشكلين (11 – 4) ، (12 – 4) تجد أنه كلما زادت نقاط التجزيء فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجياً. وبالتالي فان القيمة التقريبية لمساحة المنطقة A تصبح اكثر دقة.

∴ مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ≥ مساحة A ≥ مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج **A**.



الشكل (4-11)



الشكل (4-12)

مثال - 3-

أوجد قيمة تقريبية لمساحة المنطقة الاتية:

$$A = \{(x,y): 2 \le x \le 5 \ , \ y = x^2 + 1\}$$

وذلك باستخدام التجزئة

a) $\sigma_1 = (2,3,5)$

b) $\sigma_2 = (2,3,4,5)$

الحل

a) $\sigma_1 = (2,3,5)$

ان تجزئة $\sigma_1 = (2,3,5)$ يعني ان الفترة $[2,5]$ تجزأت الى الفترات الجزئية $[2,3], [3,5]$.

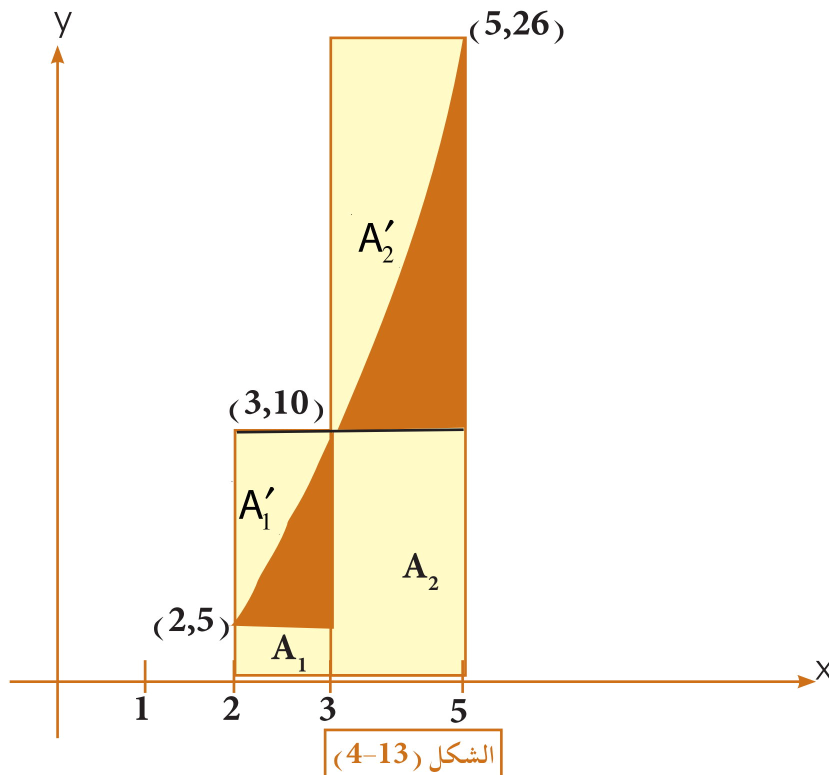
$$A_1 + A_2 = 1 \times 5 + 2 \times 10 = 25 \text{unit}^2$$

كذلك

$$A'_1 + A'_2 = 1 \times 10 + 2 \times 26 = 62 \text{unit}^2$$

بما ان مجموع مساحات المنطقة المستطيلة داخل A > مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A

$\therefore 25 \le A \le 62 \Rightarrow A = \dfrac{25+62}{2} = 43\dfrac{1}{2} \text{unit}^2$ القيمة التقريبية لمساحة A



الشكل (4-13)

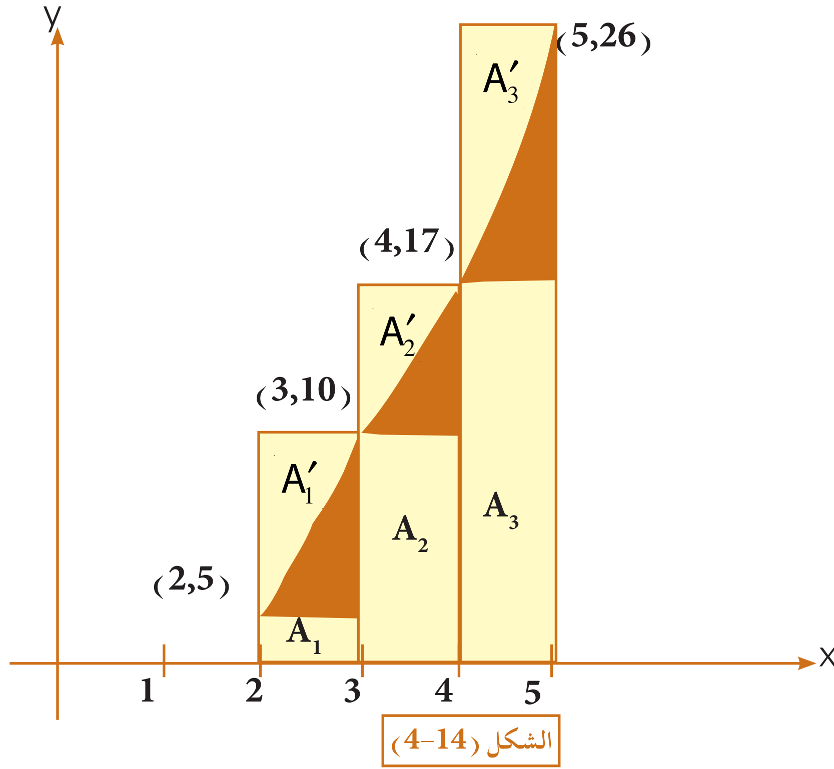
b) $\sigma_2 = (2, 3, 4, 5)$

ان تجزئة $\sigma_2 = (2,3,4,5)$ يعني ان الفترة [2 , 5] تجزأت الى الفترات الجزئية [4,5],[3 ,4],[2 ,3]

$\therefore \quad A_1 + A_2 + A_3 = 1\times5 + 1\times10 + 1\times17 = 32\text{unit}^2$

$\therefore \quad A_1' + A_2' + A_3' = 1\times10 + 1\times17 + 1\times26 = 53\text{unit}^2$

$\therefore A = \dfrac{32+53}{2} = 42\dfrac{1}{2}\text{unit}^2$



الشكل (4-14)

ملاحظة

كما اوضحنا أنه كلما زادت عدد النقاط التجزيئية فان الفرق بين مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A ومجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A يقل تدريجياً.

ففي المثال السابق عندما كانت التجزئة (2 ,3 ,5) كان الفرق : $62 - 25 = 37$

وعندما كان تجزئة (2 ,3 ,4 ,5) كان الفرق : $53 - 32 = 21$

[4-2] المجاميع العليا والمجاميع السفلى.

تعلمت في البند السابق إيجاد مجموع مساحات المناطق المستطيلة الداخلية ومجموع مساحات المناطق المستطيلة الخارجية ، وفي هذا البند سوف نعتبر الدالة : $f:[a,b] \to R$

مستمرة على $[a,b]$ ونجد مجموع مساحات المستطيلات داخل المنطقة A (Lower Rectangles) ثم مجموع مساحة المستطيلات خارج المنطقة A (Upper Rectangles) حيث A المنطقة تحت المنحني f).

أولاً : نفرض أن : $f(x) \geq 0 \ , \ \forall x \in [a,b]$

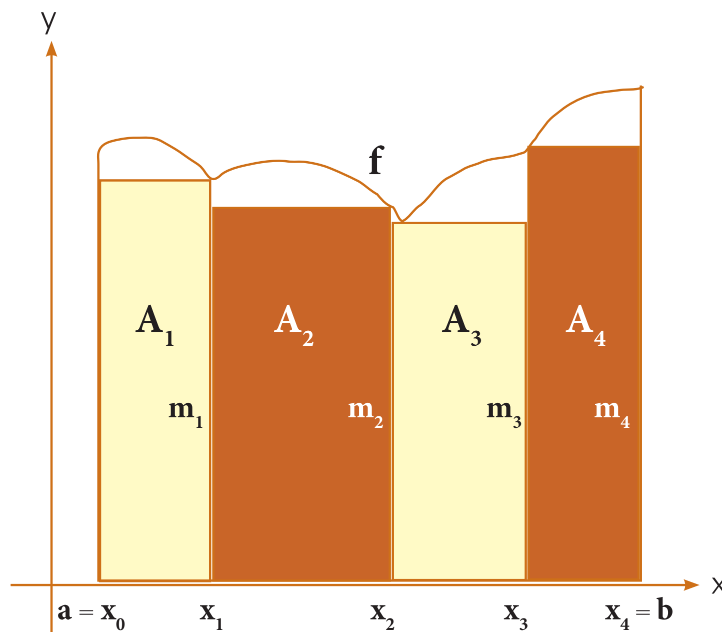
حيث $\sigma = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$

فتكون مساحة المنطقة المستطيلة A_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ وارتفاعها m_1 تساوي $m_1(x_1-x_0)$ حيث m_1(اصغر قيمة للدالة في هذه الفترة) .

وبالمثل مساحة المنطقة المستطيلة A_2 والتي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1, x_2]$ وارتفاعها m_2 تساوي $m_2(x_2-x_1)$ .... وهكذا

وبالتالي يكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة داخل A والتي سنرمز لها بالرمز $L(\sigma, f)$ تساوي

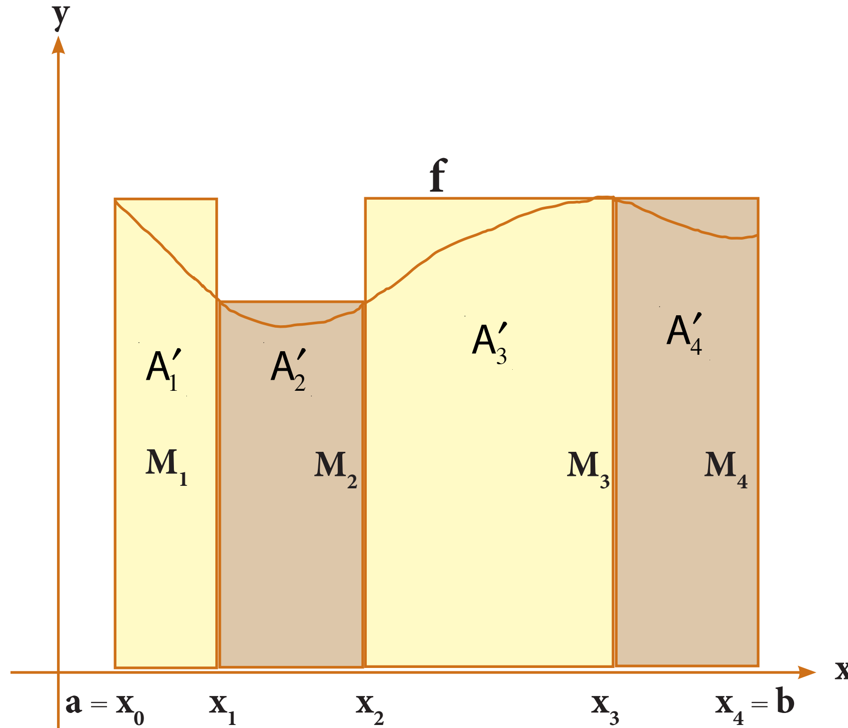
$$L(\sigma, f) = m_1(x_1-x_0) + m_2(x_2-x_1) + m_3(x_3-x_2) + m_4(x_4-x_3).$$



الشكل (4-15)

لاحظ ان : $L(\sigma, f) \leq$ مساحة A

كذلك في الشكل (4 - 16)



الشكل (4-16)

مساحة المنطقة A'_1 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_0, x_1]$ تساوي $M_1(x_1-x_0)$ حيث M_1 اكبر قيمة للدالة في الفترة $[x_0,x_1]$ ومساحة المنطقة المستطيلة A'_2 التي قاعدتها محصورة في الفترة $[x_1,x_2]$ تساوي $M_2\ (x_2-x_1)$ ...... وهكذا

فيكون مجموع مساحات المناطق المستطيلة خارج A تساوي والتي سنرمز لها بالرمز $U(\sigma, f)$ تساوي

$$U(\sigma, f) = M_1(x_1-x_0) + M_2(x_2-x_1) + M_3(x_3-x_2) + M_4(x_4-x_3).$$

لاحظ أن:

$$U(\sigma, f) \geq L(\sigma, f)$$

$$L(\sigma, f) \leq \text{مساحة } A \leq U(\sigma, f)$$

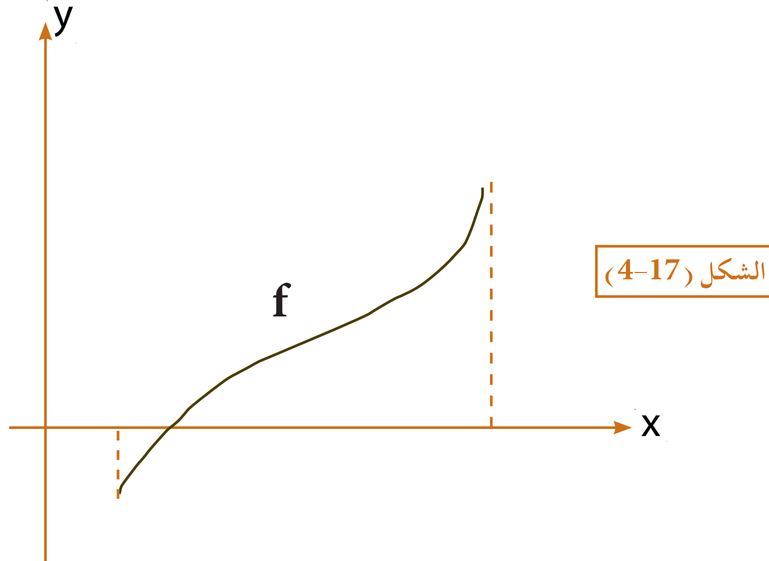
$\therefore$ أول قيمة تقريبية لمساحة A وفق التجزئة σ تساوي $\dfrac{L(\sigma, f)+U(\sigma, f)}{2}$.

ثانياً : عندما لانشترط ان تكون $f(x) \geq 0$ ، $\forall \; x \in [a,b]$ كما في الشكل (4 – 17) فانه من الممكن ان يكون **m** (اصغر قيمة ممكنة للدالة) عدداً سالباً أو موجباً او صفراً وبالتالي فانه من المتوقع أن تكون $L(\sigma, f)$ عدداً سالباً أو موجباً أو صفراً .

وبالمثل $U(\sigma, f)$ عدد موجباً أو سالباً أو صفراً وبما ان العدد السالب لا يقيس مساحة لهذا فاننا نسمي :

$L(\sigma, f)$ المجموع الاسفل

$U(\sigma, f)$ المجموع الاعلى



الشكل (4–17)

مثال – 4–

لتكن $f(x) = 5 + 2x \;,\; f : [1,4] \to R$

جد المجموع الاسفل $L(\sigma, f)$ والمجموع الاعلى $U(\sigma, f)$

الحل

نجزيء الفترة [1 , 4] الى ثلاثة فترات منتظمة فيكون .

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{3} = 1 \Rightarrow \sigma = (1, 2, 3, 4)$$

$\therefore$ الفترات هي : $[1,2] \;,\; [2,3] \;,\; [3,4]$ $\qquad f(x) = 5 + 2x \Rightarrow f'(x) = 2 > 0$

$\therefore$ لاتوجد نقاط حرجة والدالة متزايدة في مجالها . فنجد قيمة الدالة في طرفي الفترات ولايجاد $L(\sigma, f), U(\sigma, f)$ نعمل الجدول الآتي : فأيهما أصغر فهو m_i وايهما اكبر فهو M_i

الفترة الجزئية [a , b]	طول الفترة h	m_i	M_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1 , 2]	1	$m_1 = 5+2=7$	$M_1 = 5+4=9$	7	9
[2 , 3]	1	$m_2 = 5+4=9$	$M_2 = 5+6=11$	9	11
[3 , 4]	1	$m_3 = 5+6=11$	$M_3 = 5+8=13$	11	13
				$\sum h_i m_i = 27$	$\sum h_i M_i = 33$

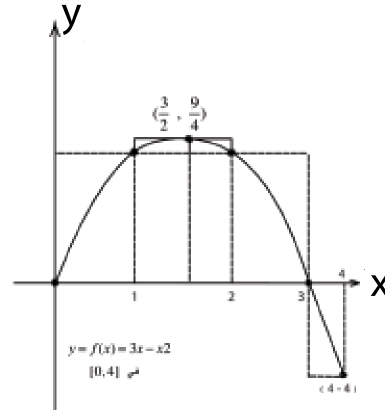
$$\therefore \sum h_i m_i = L(\sigma, f) = 27 \;,\; \sum h_i M_i = U(\sigma, f) = 33$$

مثال – 5–

اذا كانت $f(x)=3x-x^2$, $f:[0,4]\rightarrow R$

اوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ مستخدماً اربعة تجزيئات منتظمة

الحل



$$h=\frac{b-a}{n}=\frac{4-0}{4}=1\Rightarrow\sigma=(0,1,2,3,4)$$

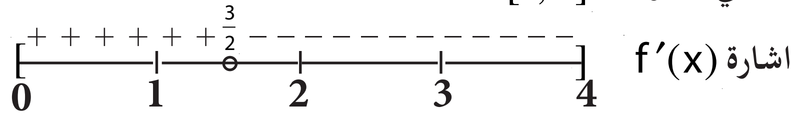
$[0,1]$, $[1,2]$, $[2,3]$, $[3,4]$

$f(x)=3x-x^2\Rightarrow f'(x)=3-2x$

$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}\in[1,2]$

أي ان العدد الحرج يوجد في الفترة $[1,2]$

اشارة $f'(x)$



الفترة الجزئية $[a,b]$	طول الفترة h	m_i	M_i	h_im_i	h_iM_i
$[0,1]$	1	0	2	0	2
$[1,2]$	1	2	$\frac{9}{4}$	2	$\frac{9}{4}$
$[2,3]$	1	0	2	0	2
$[3,4]$	1	-4	0	-4	0
				$\sum h_im_i=-2$	$\sum h_iM_i=6\frac{1}{4}$

$$\therefore \sum h_im_i=L(\sigma,f)=-2\quad,\quad \sum h_iM_i=U(\sigma,f)=6\frac{1}{4}$$

لاحظ ان $L(\sigma,f)\le U(\sigma,f)$

ملاحظة في حل تمارين (1-4)

1 - نجزء الفترة المعطاة [a,b] الى فترات جزئية بأيجاد h حيث $h=\frac{b-a}{n}$

n عدد الجزيئات منها نجد σ

2 - نجد $f'(x)$ ومنها نجد النقطة الحرجة بجعل $f'(x)=0$

3 - نعمل جدول كما في الامثلة السابقة لتحديد M_i , m_i (لاحظ التزايد ، التناقص) ومنه نجد $U(\sigma,f)$ ، $L(\sigma,f)$

تمارين (1-4)

اوجد كل من $L(\sigma,f)$ ، $U(\sigma,f)$ لكل مما يأتي:

1. $f:[-2,1]\to R\ ,\ f(x)=3-x$

a) $\sigma=(-2,0,1)$

b) تقسيم الفترة [1, 2-] الى ثلاث فترات جزئية منتظمة

2. $f:[0,4]\to R\ ,\ f(x)=4x-x^2$

اذا كان $\sigma=(0,1,2,3,4)$

3. $f:[1,4]\to R\ ,\ f(x)=3x^2+2x$

a) $\sigma=(1,2,4)$

b) استخدم ثلاث تجزيئات متساوية

[3-4] تعريف التكامل .

لاحظت في البند السابق أنه إذا كانت :

$f:[a,b]\to R$

دالة مستمرة على الفترة [a,b] فانه وفقاً للتجزئة σ يكون $U(\sigma,f)\geq L(\sigma,f)$

والآن نسأل السؤال الآتي : هل يوجد عدد **k** بحيث : $L(\sigma,f)\leq k\leq U(\sigma,f)$

لأي تجزئة للفترة [a,b] ؟

والجواب : هو ما تنص عليه المبرهنة التالية :

مبرهنة :(4-1)

اذا كانت : $f:[a,b]\to R$ دالة مستمرة على الفترة [a,b] فانه يوجد عدد وحيد **k** بحيث

لأي تجزيء σ للفترة [a,b] فان $L(\sigma,f)\leq k\leq U(\sigma,f)$

نسمي العدد **k** التكامل المحدد للدالة **f** على [a,b] ونرمز له $\int_a^b f(x)dx$ ويقرأ التكامل من

a الى **b** للدالة **f** ونسمي **b,a** حدّي التكامل

ملاحظات

1. اذا كانت **f** دالة مستمرة على [a,b] فان : $L(\sigma,f)\leq \int_a^b f(x)dx \leq U(\sigma,f)$

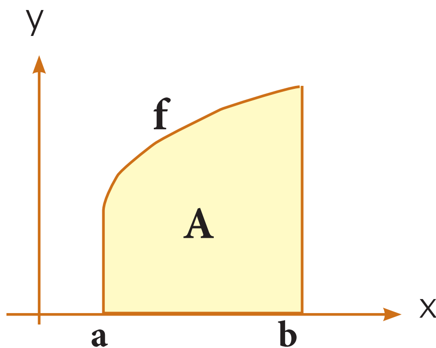
وتكون القيمة التقريبية للتكامل $\int_a^b f(x)dx = \dfrac{L(\sigma,f)+U(\sigma,f)}{2}$

2. اذا كانت : $f(x)\geq 0 , \forall x\in[a,b]$

فان $\int_a^b f(x)dx$ يعطي مساحة المنطقة **A** تحت

منحنى **f** وهو عدد غير سالب .

حيث dx تشير الى ان حدي التكامل **b,a** قيمتان للمتغير x



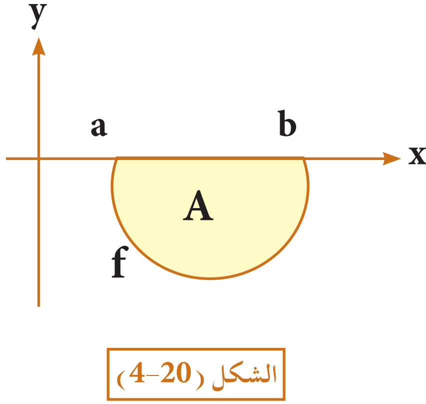
الشكل (4-19)

3. اذا كانت $f(x) \leq 0$ ، $\forall x \in [a,b]$ فـإن :

$$\int_a^b f(x)dx \leq 0$$

وهذا لا يـدل على المساحـــة ، أمـا مساحـــة المنطقة **A** الموضحة في الشكـل (**4 – 20**) فهي تساوي

$$-\int_a^b f(x)dx = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$$



الشكل (**4–20**)

4. إن قيمة $\int_a^b f(x)dx$ تتوقف على الفترة [**a,b**] وعلى الدالة $f(x)$

مثال – 1 –

لتكن $f:[1,3] \to R$ حيث $f(x) = x^2$

أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_1^3 x^2\, dx$ اذا جزئت الفترة [**1 ,3**] الى تجزئتين .

الحل

$$f(x) = x^2$$

f دالة مستمرة على الفترة [**1,3**] كثيرة حدود.

$$\therefore f'(x) = 2x \quad , \quad f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

أي أن النقطة الحرجة عند $x = 0$ وأن $0 \notin [1,3]$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

الفترات الجزئية [a , b]	طول الفترة b – a	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1 , 2]	1	1	4
[2 , 3]	1	4	9

∴ أعظم قيمة وأصغر قيمة للدالة تكون عند طرفي كل فترة جزئية اي عند طرفي كل من [1,2] ، [2,3]

$$L(\sigma, f) = (1\times1)+(1\times4) = 1+4 = 5$$

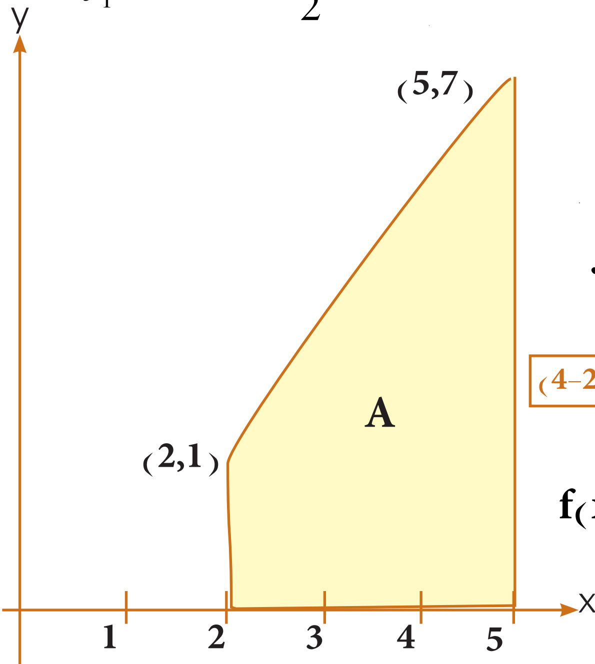
$$U(\sigma, f) = (1\times4)+(1\times9) = 4+9 = 13$$

$$\therefore \int_1^3 x^2\, dx = \frac{5+13}{2} = 9$$ تقريبا

مثال -2-

لتكن $f:[2,5]\to R$

حيث $f(x)=2x-3$ أوجد $\int_2^5 f(x)dx$



الشكل (4-21)

الحل

لاحظ ان $\forall x\in[2,5]$ $f(x) > 0$

∴ يمكن ايجاد $\int_2^5 f(x)dx$ من مساحة **A**

وهي منطقة شبه منحرف

∴ مساحة المنطقة $A = \frac{1}{2}$ مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين × طول الارتفاع.

$$\therefore A = \frac{1}{2}[1+7](3) = \frac{1}{2}(8)(3) = 12 \text{ Unit}^2$$

$$\therefore \int_2^5 f(x)dx = 12$$

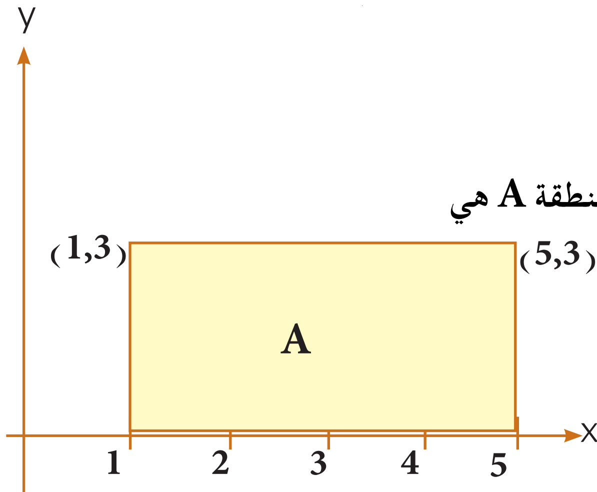
أو يمكن إيجاد $\int_2^5 f(x)dx$ بالطريقة السابقة وكما يأتي:

فترة التجزئة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	M_i	m_i	h_iM_i	h_im_i
[2,3]	1	3	1	3	1
[3,5]	2	7	3	14	6
				$\sum h_iM_i=17$	$\sum h_im_i=7$

$$\int_2^5 (2x-3)\,dx = \frac{17+7}{2} = \frac{24}{2} = 12 \text{ Unit}^2$$

مثال – 3–

لتكن $f(x)=3$ ، $f:[1,5]\rightarrow R$ أوجد $\int_1^5 f(x)dx$



الشكل (22–4)

الحل

من الشكل (22 – 4) نلاحظ ان المنطقة A هي

منطقة مستطيلة طول قاعدتها =

(5 – 1) = 4 وعرضها = 3

$$\therefore A=(4)(3)=12 \text{ Unit}^2$$

$$\therefore \int_1^5 f(x)dx = 12 \text{ unit}^2$$

طريقة ثانية :

فترة التجزئة [a,b]	طول الفترة $h_i=b-a$	M_i	m_i	$h_i m_i$	$h_i M_i$
[1,3]	2	3	3	6	6
[3,5]	2	3	3	6	6
				$\sum h_i m_i=12$	$\sum h_i M_i=12$

$$L(\sigma,f)=\sum h_i m_i=12 \;,\; U(\sigma,f)=\sum h_i M_i=12$$

$$\int_1^5 3dx=\frac{12+12}{2}=\frac{24}{2}=12 \text{ Unit}^2$$

تمارين (2-4)

1. أوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{3} \frac{3}{x}\,dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3)$.

2. لتكن $f : [1, 4] \to R \quad , \quad f(x) = 3x - 3$

أوجد قيمة التكامل $\int_{1}^{4} f(x)dx$ بأستخدام التجزئة $\sigma = (1, 2, 3, 4)$ ثم تحقق هندسياً بحساب مساحة المنطقة تحت منحني **f**.

3. أوجد قيمة تقريبية التكامل $\int_{2}^{4} \left(3x^2 - 3\right) dx$ باستخدام التجزئة $\sigma = (2, 3, 4)$.

4. أوجد قيمة التكامل $\int_{-3}^{2} f(x)dx$ حيث $f(x) = -4$

5. اوجد قيمة تقريبية للتكامل $\int_{1}^{5} x^3 dx$ باستخدام اربعة تجزيئات منتظمة.

[4-4] النظرية الاساسية للتكامل - الدالة المقابلة:

لقد تعلمنا فيما سبق طريقة إيجاد قيمة للتكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx$ حيث **f** دالة مستمرة على الفترة المغلقة [**a,b**] كما وجدنا في بعض الحالات الخاصة قيمة دقيقة لهذا التكامل المحدد (باستخدام المساحة) .

والمبرهنة الآتية تساعدنا في إيجاد قيمة التكامل المحدد .

مبرهنة :(4-2)

اذا كانت **f** دالة مستمرة على الفترة [**a,b**] فانه توجد دالة F مستمرة على الفترة [**a,b**] بحيث :

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$$

ويكون :

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

تسمى F الدالة المقابلة للدالة **f** (**Antiderivative of The Function**) على الفترة $[a,b]$

فمثلاً : اذا كانت $f:[1,2] \to R \quad , \quad f(x) = 2x$

فان $F:[1,2] \to R \quad , \quad F(x) = x^2$

$$F'(x) = 2x = f(x) \quad , \quad \forall x \in (1,2)$$

وعليه فان :

$$\int_1^2 f(x)dx = F(2) - F(1)$$

$$= 4 - 1 = 3$$

ملاحظة نشير الى أن $F(2) - F(1)$ تكتب بالصورة $[F(x)]_1^2$

مثال - 1 -

إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[1,5]$ بحيث $F(x) = 3x^2$ دالة مقابلة للدالة f فجد $\int_1^5 f(x)dx$.

الحل

$$\int_1^5 f(x)\,dx = F(5) - F(1) = 3(25) - 3(1) = 75 - 3 = 72$$

ويمكن ان نكتب ذلك بالصورة الآتية :

$$\int_1^5 f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_1^5 = \left[3x^2\right]_1^5 = 75 - 3 = 72$$

مثال - 2 -

إذا كانت f دالة مستمرة على الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$ وإن الدالة المقابلة للدالة f هي :

$$F(x) = \sin x \quad , \quad F:[0,\frac{\pi}{2}] \to R$$

فأوجد : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$

الحل

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx = [F(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال - 3 -

أثبت فيما إذا كانت $F:[1,3] \to R, \ F(x) = x^3 + 2$

هي دالة مقابلة للدالة : $f(x) = 3x^2$

الحل

$\because$ الدالة $F(x) = x^3 + 2$ مستمرة وقابلة للاشتقاق على R

(لانها دالة كثيرة الحدود)

$\therefore F$ مستمرة على $[1,3]$ وقابلة للاشتقاق على $(1,3)$.

$$\because F'(x) = 3x^2 = f(x) \quad , \quad \forall x \in (1,3)$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة f على $[1,3]$.

مثال – 4–

أثبت أن الدالة : $F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$, $F:R\to R$ هي دالة مقابلة للدالة

$$f:R\to R\ ,\ f(x)=\cos 2x$$

ثم اوجد $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx$

الحل

$f(x)=\cos 2x$, $f:R\to R$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على **R** كما تعلمنا في الصف الخامس العلمي كذلك فان :

$$F(x)=\frac{1}{2}\sin 2x$$

هي دالة مستمرة وقابلة للاشتقاق على **R**

$$\because F'(x)=\frac{1}{2}(\cos 2x)(2)=\cos 2x=f(x)\ ,\ \forall x\in R$$

$\therefore F$ هي دالة مقابلة للدالة **f**

$$\because \int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

حسب المبرهنة (**4–2**)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_{x=0}^{x=\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\sin 0=\frac{1}{2}\times 1-0=\frac{1}{2}.$$

وفي ما يلي جدول مساعد يبين الدالة **f** والدالة المقابلة لها F في حالات خاصة . وبإمكانك عزيزي الطالب أن تتحقق من صحة ذلك بإثبات أن :

$$\boxed{F'(x)=f(x)}$$

وفيما يلي جدول مساعد يبيّن الدالة f والدالة المقابلة لها F

الدالة f(x)	الدالة المقابلة لها F(x)
a	ax
$x^n \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$ax^n \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{ax^{n+1}}{n+1}$
$[f(x)]^n . \ f'(x) \quad , \quad n \neq -1$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$\sec^2(ax+b)$	$\frac{1}{a}\tan(ax+b)$
$\csc^2(ax+b)$	$-\frac{1}{a}\cot(ax+b)$
$\sec ax \tan ax$	$\frac{1}{a}\sec ax$
$\csc ax \cot ax$	$-\frac{1}{a}\csc ax$

مجموعة الدوال المقابلة لاية دالة f كما في الجدول هي $F + C$ حيث C عدد ثابت حقيقي

.

مثال – 5–

أوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx$

الحل

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x \, dx = [\tan x]_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \tan\frac{\pi}{4} - \tan 0 = 1 - 0 = 1$$

مثال – 6–

أوجد $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx$

الحل

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \csc^2 x \, dx = [-\cot x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = -\cot\frac{\pi}{2} + \cot\frac{\pi}{4} = 0 + 1 = 1$$

مثال – 7–

أوجد $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx$

الحل

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \sec x \tan x \, dx = [\sec x]_{0}^{\frac{\pi}{3}} = \sec\frac{\pi}{3} - \sec 0 = 2 - 1 = 1$$

مثال – 8–

جد $\int_{1}^{3} x^3 dx$

الحل

$$\int_{1}^{3} x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_{1}^{3} = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$$

[4-5] خواص التكامل المحدد :

اولاً :

1. f دالة مستمرة على $[a,b]$ فاذا كانت :

$f(x)\geq 0 \ , \ \forall x\in[a,b]$ فان $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

فمثلاً :

a) $f(x)=x^2\geq 0 \ , \ \forall x\in[-1,2]$ لأن : $\int_{-1}^{2} x^2dx\geq 0$

b) $f(x)=3>0 \ , \ \forall x\in[-2,3]$ لأن : $\int_{-2}^{3} 3dx>0$

c) $f(x)=(x+1)>0 \ , \ \forall x\in[2,3]$ لأن : $\int_{2}^{3}(x+1)\,dx>0$

2. f دالة مستمرة على $[a,b]$ فاذا كانت : $f(x)\leq 0 \ , \ \forall x\in[a,b]$ فان $\int_a^b f(x)dx\leq 0$

فمثلاً :

a) $f(x)<0, \forall X\in[1,2]$ لان : $\int_1^2(-2)dx<0$

b) $f(x)<0, \forall X\in[-2,-1]$ لان : $\int_{-2}^{-1} x\,dx<0$

ثانياً :

f دالة مستمرة على $[a,b]$ ، c عدداً حقيقياً ثابتاً فان : $\int_a^b c.f(x)dx=c\int_a^b f(x)dx$

مثال - 9 -

اذا كان $\int_2^5 f(x)dx=8$ فأوجد $\int_2^5 5f(x)dx$.

الحل

$$\int_2^5 5f(x)dx=5\int_2^5 f(x)dx=5(8)=40$$

ثالثاً :

إذا كانت الدالتان f_1 , f_2 مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فان : $\int_a^b(f_1\mp f_2)=\int_a^b f_1\mp\int_a^b f_2$

ويمكننا تعميم هذه الخاصية على مجموع أي عدد محدد من الدوال المستمرة على $[a,b]$

مثال – 10–

اذا كانت $\int_{1}^{3} f_2(x)dx = 17$, $\int_{1}^{3} f_1(x)dx = 15$ فأوجد كلاً من :

$$\int_{1}^{3}(f_1(x)-f_2(x))dx \quad , \quad \int_{1}^{3}(f_1(x)+f_2(x))dx$$

الحل

$$\int_{1}^{3}(f_1(x)+f_2(x))dx = \int_{1}^{3} f_1(x)dx + \int_{1}^{3} f_2(x)dx = 15+17 = 32$$

$$\int_{1}^{3}(f_1(x)-f_2(x))dx = \int_{1}^{3} f_1(x)dx - \int_{1}^{3} f_2(x)dx = 15-17 = -2$$

مثال – 11–

اذا كانت $f(x) = 3x^2 + 2x$ فأوجد $\int_{1}^{2} f(X)dx$

الحل

$$\int_{1}^{2} f(x)dx = \int_{1}^{2}(3x^2+2x)dx = \int_{1}^{2} 3x^2dx + \int_{1}^{2} 2x\,dx$$

$$= [x^3]_1^2 + [x^2]_1^2 = (8-1)+(4-1) = 7+3 = 10$$

رابعاً :

اذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ وكانت $c \in (a,b)$ فان :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \int_{a}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{b} f(x)dx$$

مثال – 12–

اذا كانت $\int_{3}^{7} f(x)dx = 8$, $\int_{1}^{3} f(x)dx = 5$ فأوجد $\int_{1}^{7} f(x)dx$

الحل

$$\int_{1}^{7} f(x)dx = \int_{1}^{3} f(x)dx + \int_{3}^{7} f(x)dx = 5+8 = 13$$

مثال - 13- لتكن $f(x)=|x|$ اوجد $\int_{-3}^{4} f(x)dx$

الحل

f دالة مستمرة على $[-3,4]$ ولها قاعدتان هما :

$$f(x)=\begin{cases} x \ , \forall x \geq 0 \\ -x \ , \forall x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{0} (-x)dx + \int_{0}^{4} xdx = \left[\frac{-x^2}{2}\right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{4}$$

$$=\left[0+\frac{9}{2}\right]+\left[\frac{16}{2}-0\right]=\frac{9}{2}+\frac{16}{2}=\frac{25}{2}$$

مثال - 14- اذا كانت : $f(x)=\begin{cases} 2x+1, \forall x \geq 1 \\ 3 \quad , \forall x < 1 \end{cases}$ فأوجد

$$\int_{0}^{5} f(x)dx$$

الحل

f مستمرة على الفترة $[0,5]$ وذلك لانها :

مستمرة عند $x = 1$ لأن :

(i) $f(1)=2(1)+1=3$ معرفة

$$(ii) \lim_{x\to 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to 1^+}(2x+1) = 3 = L_1 \\ \lim_{x\to 1^-} 3 = 3 = L_2 \end{cases}$$

$\because L_1=L_2$

$\therefore \lim_{x\to 1} f(x) = 3$ موجودة $\Rightarrow \lim_{x\to 1} f(x) = f(1)$

كذلك الدالة مستمرة على كل من $\{x : x > 1\}$, $\{x : x < 1\}$. وبما ان الدالة مستمرة على $[0,5]$

$$\therefore \int_0^5 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^5 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 3dx + \int_1^5 (2x+1)dx = [3x]_0^1 + [x^2 + x]_1^5$$

$$= [3-0] + [25+5] - [2] = 3 + 28 = 31$$

خامساً :

$$a) \int_a^a f(x)dx = 0 \qquad b) \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مثلاً :

$$a) \int_3^3 x\, dx \Rightarrow \left[\frac{x^2}{2}\right]_3^3 = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} = 0$$

او اختصاراً وحسب القاعدة

$$\int_3^3 x\, dx = 0$$

$$b) \int_3^2 3x^2 dx = -\int_2^3 3x^2 dx$$

$$= -[x^3]_2^3$$

$$= -[27] + [8] = -19$$

تمارين (4-3)

1. احسب كلاً من التكاملات الاتية:

a) $\int_{-2}^{2}(3x-2)dx$ b) $\int_{1}^{2}(x^{-2}+2x+1)dx$

c) $\int_{1}^{3}(x^{4}+4x)dx$ d) $\int_{0}^{2}|x-1|dx$

e) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}(x+\cos x)dx$ f) $\int_{3}^{2}\frac{x^{3}-1}{x-1}dx$ g) $\int_{1}^{3}\frac{2x^{3}-4x^{2}+5}{x^{2}}dx$

2. أثبت أن $F(x)$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)$ حيث

$F:[0,\frac{\pi}{6}]\to R$ حيث $F(x)=\sin x+x$

$f(x)=1+\cos x$ حيث $f:[0,\frac{\pi}{6}]\to R$ ثم احسب $\int_{0}^{\frac{\pi}{6}}f(x)dx$.

3. أوجد كلاً من التكاملات الاتية:

a) $\int_{1}^{4}(x-2)(x+1)^{2}dx$ b) $\int_{-1}^{1}|x+1|dx$

c) $\int_{2}^{3}\frac{x^{4}-1}{x-1}dx$ d) $\int_{0}^{1}\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^{2}dx$

4. إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x, & \forall x\geq 3\\ 6, & \forall x<3\end{cases}$ جد $\int_{1}^{4}f(x)dx$

5. إذا كانت $f(x)=\begin{cases}3x^{2}, & \forall x\geq 0\\ 2x, & \forall x<0\end{cases}$ جد $\int_{-1}^{3}f(x)dx$

[4-6] التكامل غير المحدد : Indefinite Integral

عرفنا في النظرية الاساسية للتكامل أنه إذا كانت **f** دالة مستمرة على الفترة $[a,b]$ فانه توجد دالة مقابلة F مستمرة على $[a,b]$ بحيث أن : $F'(x)=f(x) \quad , \quad \forall x \in (a,b)$

فمثلاً :

$F(X)=X^2$ ، $F:[1,3]\rightarrow R$ هي دالة مقابلة للدالة $f(x)=2x$.

ولكن هل $F(x)=x^2$ دالة مقابلة وحيدة للدالة $F'(X)=2X$ ؟

وقبل الاجابة عن هذا السؤال نتأمل الدوال الآتية :

$$1)\quad F_1:[1,3]\rightarrow R \quad , \quad F_1(x)=x^2+1$$

$$2)\quad F_2:[1,3]\rightarrow R \quad , \quad F_2(x)=x^2+\frac{1}{2}$$

$$3)\quad F_3:[1,3]\rightarrow R \quad , \quad F_3(x)=x^2-\sqrt{2}$$

$$4)\quad F_4:[1,3]\rightarrow R \quad , \quad F_4(x)=x^2-5$$

اننا نلاحظ أن كلاً من F_1, F_2, F_3, F_4 لها صفات F نفسها أي أنَّ كلاً منها :

(**i**) مستمرة على $[1,3]$ } كثيرة الحدود
(**ii**) قابلة للاشتقاق على $(1,3)$

(**iii**) $F_1'(x)=F_2'(x)=F_3'(x)=F_4'(x)=2x \quad , \quad \forall x \in (1,3)$.

وبناءاً على ذلك يمكن القول بان كلاً من : F_1, F_2, F_3, F_4 دالة مقابلة الى **f**.

أي انه توجد اكثر من دالة مقابلة للدالة المستمرة على $[1,3]$ والفرق بين أي دالتين مقابلتين للدالة **f** يساوي عدداً ثابتاً لاحظ أن :

$$F_1(x)-F_2(x)=(x^2+1)-(x^2+\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$$

$$F_1(x)-F_4(x)=(x^2+1)-(x^2-5)=6$$

وهكذا

وبصورة عامة

اذا كانت للدالة **f** المستمرة على $[a,b]$ دالة مقابلة **F** فان يوجد عدد لانهائي من الدوال المقابلة للدالة **f**، كل منها تكون من الصورة : **F + C** حيث **C** عدداً ثابتاً والفرق بين أي إثنتين منها يساوي عدداً ثابتاً .

تسمى مجموعة الدوال المقابلة التي على الصورة **F + C** بالتكامل غير المحدد للدالة f المستمرة على $[a,b]$ ويرمز لها بالرمز $\int f(x)dx$ إذا كان رمز المتغير **x**.

كما يصطلح على كتابة التكامل غير المحدد على الصورة :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \quad , C \in R$$ عدد ثابت

مثال -1-

أوجد $\int f(x)dx$ اذا علمت أن:

$a)\ f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

$b)\ f(x) = \cos x + x^{-2}$

$c)\ f(x) = x + \sec x \tan x$

$d)\ f(x) = \sin(2x+4)$

الحل

$$a)\ \int (3x^2 + 2x + 1)dx = \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + x + c = x^3 + x^2 + x + c$$

$$b)\ \int (\cos x + x^{-2})dx = \sin x + \frac{x^{-1}}{-1} + c = \sin x - \frac{1}{x} + c$$

$$c)\ \int (x + \sec x \tan x)dx = \frac{x^2}{2} + \sec x + c$$

$$d)\ \int \sin(2x+4)dx = \frac{-1}{2}\cos(2x+4) + c$$

مثال – 2 –

جد التكاملات لكل مما يأتي :

a. $\int (x^2+3)^2(2x)dx$

الحل

لنفرض أن

$f(x)=x^2+3$

$\therefore f'(x)=2x$

$$\int (x^2+3)^2(2x)dx=\int [f(x)]^2 f'(x)dx=\frac{1}{3}[f(x)]^3+c$$

$$=\frac{1}{3}(x^2+3)^3+c$$

b. $\int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx$

نفرض أن :

$f(x)=3x^2+8x+5 \Rightarrow f'(x)=6x+8$

$$\therefore \int (3x^2+8x+5)^6(3x+4)dx=\frac{1}{2}\int (3x^2+8x+5)^6(6x+8)dx$$

$$\frac{1}{2}\int [f(x)]^6 f'(x)dx=\frac{1}{2}\times\frac{[f(x)]^7}{7}+c=\frac{1}{14}(3x^2+8x+5)^7+c$$

c. $\int \sin^4 x\cos xdx$

نفرض أن :

$f(x)=\sin x \Rightarrow f'(x)=\cos x$

$$\therefore \int \sin^4 x\cos xdx=\int [f(x)]^4 .f'(x)dx=\frac{[f(x)]^5}{5}+c=\frac{1}{5}\sin^5 x+c$$

d. $\int \tan^6 x \sec^2 xdx$

نفرض أن :

$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=\sec^2 x$

$$\therefore \int \tan^6 x \sec^2 xdx=\int [f(x)]^6 f'(x)dx=\frac{[f(x)]^7}{7}+c=\frac{1}{7}\tan^7 x+c$$

تكامل الدوال المثلثية التربيعية

1. $\int \sec^2\theta \; d\theta = \tan\theta + c$

2. $\int \csc^2\theta \; d\theta = -\cot\theta + c$

3. $\int \tan^2\theta \; d\theta = \int (\sec^2\theta - 1)d\theta = \int \sec^2\theta \; d\theta - \int d\theta = \tan\theta - \theta + c$

4. $\int \cot^2\theta \; d\theta = \int (\csc^2\theta - 1)d\theta = -\cot\theta - \theta + c$

5. $\int \sin^2\theta \; d\theta = \int \frac{1-\cos 2\theta}{2}d\theta = \frac{1}{2}\int d\theta - \frac{1}{4}\int \cos 2\theta(2)d\theta$

$= \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

6. $\int \cos^2\theta d\theta = \int \frac{1+\cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta + c$

أمثلة

جد تكاملات كل مما يأتي :

1. $\int 9\sin 3x dx = 3\int 3\sin 3x dx = -3\cos 3x + c$

2. $\int x^2 \sin x^3 dx = \frac{1}{3}\int 3x^2 \sin x^3 dx = -\frac{1}{3}\cos x^3 + c$

3. $\int \sqrt{1-\sin 2x}dx = \int \sqrt{\sin^2 x - 2\sin x\cos x + \cos^2 x}dx = \int \sqrt{(\sin x - \cos x)^2}\; dx$

$= \pm\int (\sin x - \cos x)dx = \pm(\cos x + \sin x) + c$

4. $\int \sin^4 x \; dx = \int \frac{(1-\cos 2x)^2}{4}dx = \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x dx$

$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{4}\int 2\cos 2x dx + \frac{1}{8}\int dx + \frac{1}{32}\int 4\cos 4x dx$

$= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{8}x + \frac{1}{32}\sin 4x + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$

5. $\int (\sin x-\cos x)^7(\cos x+\sin x)dx=\frac{(\sin x-\cos x)^8}{8}+c$

6. $\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan^3 x}dx=\int \tan^{-3} x\sec^2 xdx=\frac{\tan^{-2} x}{-2}+c=\frac{-1}{2\tan^2 x}+c$

7. $\int \cos^3 xdx=\int \cos x(1-\sin^2 x)dx=\int \cos xdx-\int \sin^2 x\cos xdx$

$$=\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+c$$

8. $\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}dx=\int \tan x\sec^2 xdx=\frac{\tan^2 x}{2}+c$

9. $\int \sin 6x\cos^2 3xdx=\int (2\sin 3x\cos 3x)\cos^2 3xdx=2\int \cos^3 3x\sin 3xdx$

$$=\frac{-2}{3}\times\frac{\cos^4 3x}{4}+c=-\frac{1}{6}\cos^4 3x+c$$

10. $\int \frac{\cos 4x}{\cos 2x-\sin 2x}dx=\int \frac{\cos^2 2x-\sin^2 2x}{\cos 2x-\sin 2x}dx$

$$=\int \frac{(\cos 2x-\sin 2x)(\cos 2x+\sin 2x)}{\cos 2x-\sin 2x}dx$$

$$=\int (\cos 2x+\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+c$$

11. $\int \sin^2 3xdx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{12}\sin 6x+c$

12. $\int \cot^2 5xdx=-\frac{1}{5}\cot 5x-x+c$

13. $\int \tan^2 7xdx=\frac{1}{7}\tan 7x-x+c$

تمارين (4-4)

جد تكاملات كل مما يلي ضمن مجال الدالة :

1. $\int \frac{(2x^2-3)^2-9}{x^2}dx$

2. $\int \frac{(3-\sqrt{5x})^7}{\sqrt{7x}}dx$

3. $\int \frac{\cos^3 x}{1-\sin x}dx$

4. $\int \csc^2 x \cos x \, dx$

5. $\int \frac{x}{(3x^2+5)^4}dx$

6. $\int \sqrt[3]{x^2+10x+25}dx$

7. $\int \sin^3 x dx$

8. $\int \frac{\cos\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}}dx$

9. $\int (3x^2+1)^2 dx$

10. $\int \frac{\sqrt{\sqrt{x}-x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$

11. $\int (1+\cos 3x)^2 dx$

12. $\int \sec^2 4x \, dx$

13. $\int \csc^2 2x \, dx$

14. $\int \tan^2 8x \, dx$

15. $\int \frac{\sqrt{\cot 2x}}{1-\cos^2 2x}dx$

16. $\int \cos^2 2x \, dx$

17. $\int \sin^2 8x \, dx$

18. $\int \cos^4 3x \, dx$

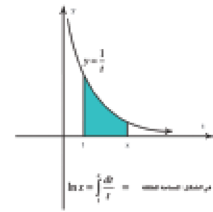
[4-7] اللوغارتم الطبيعي The Natural Logarithmic

درسنا دوالاً مألوفة نوعاً ما . فكثيرات الحدود والدوال النسبية وغيرها من الدوال الجبرية تنتج عن عمليات مألوفة في الحساب والجبر ، ويمكن مطابقة قيم الدوال المثلثية باحداثيات نقط على دائرة الوحدة. اما الان فندرس دالة اللوغارتم الطبيعي التي تعتمد على حساب التفاضل والتكامل حتى في تعريفها.

تعريف [4-1]

يعرَّف لوغارتم x الطبيعي، ويرمز له بـ (ln x) بأنه :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad ; \quad \forall x > 0 \qquad \ldots\ldots\ldots (1)$$



يمثل هذا التكامل لكل x اكبر من 1 ، المساحة المحدودة من الاعلى بالمنحني $y = \frac{1}{t}$ ومن الاسفل بالمحور t ،

ومن اليسار بالمستقيم $t = 1$ ومن اليمين بالمستقيم $t = x$

اي اذا كان $x = 1$ ، تطابق الحدان الايمن والايسر للمساحة واصبحت المساحة صفراً.

$$\ln 1 = \int_1^1 \frac{1}{t}\,dt = 0 \qquad \left(\int_a^a f(x)dx = 0 \right)$$

اما اذا كانت x اصغر من 1 واكبر من الصفر فعندئذ يكون الحد الايسر هو المستقيم $t = x$ ، والحد الايمن هو t=1 وفي هذه الحالة يكون التكامل :

$$\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt = -\int_x^1 \frac{1}{t}\,dt$$

مساويا للقيمة السالبة للمساحة تحت المنحني بين x و 1 .

* ينسب اول اكتشاف للوغاريتم الطبيعي الى النبيل الاسكتلندي John Napier (1550 - 1617)

وفي كل الحالات ، x عدداً موجباً، فانه يمكن حساب قيمة التكامل المحدد في المعادلة (**1**) الى اي عدد نرغب فيه من الارقام العشرية كما مر بنا في حساب المساحة تحت المنحني بالتقريب.

وبما ان الدالة $F(x) = \ln x$ معرفة بالتكامل

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt \quad , \quad \forall x > 0$$

فانه من المبرهنة الاساسية لحساب التكامل في البند (**4-4**) نعلم ان: $F'(x) = \dfrac{1}{x}$

اي ان: $\boxed{\dfrac{d}{dx}(\ln x) = \dfrac{1}{x}}$

كما يمكننا الحصول على صيغة أعم عندما يكون لدينا **ln u** حيث **u** دالة موجبة قابلة للاشتقاق بالنسبة لـ x

فقاعدة السلسلة للمشتقات (**Chain Rule**) تعطينا :

$$\frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{d(\ln u)}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(\ln u) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \qquad \Rightarrow d(\ln u) = \frac{1}{u}du$$

مثال - 1 - اذا كان $y = \ln(3x^2 + 4)$ فاوجد $\dfrac{dy}{dx}$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3x^2 + 4} \cdot \frac{d(3x^2 + 4)}{dx}$$

$$= \frac{6x}{3x^2 + 4}$$

ان الصيغة $d(\ln u) = \dfrac{1}{u}du$ تقودنا الى $\int \dfrac{du}{u} = \ln u + c$ وبشرط ان تكون **u** موجبة

مثال – 2– جد $\int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta}$

الحل

نفرض

$$u = 1+\sin\theta$$

$$\frac{du}{d\theta} = \cos\theta \Rightarrow du = \cos\theta \, d\theta$$

$$\therefore \int \frac{\cos\theta \, d\theta}{1+\sin\theta} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c$$

$$= \ln|1+\sin\theta| + c$$

[4–7–1] دالة اللوغارتم الطبيعي.

لتكن $y = \ln x$

لو ابدلنا x , y في مجموعة الازواج المرتبة: $\{(x,y) : y = \ln x \ , \ x > 0\}$

لحصلنا على دالة نرمز لها $x = \ln^{-1}(y) \quad , \quad y > 0, \quad x \in R$

$$x = e^{y}$$

ويكون مجال $\ln^{-1}(y)$ هو مدى $\ln(x)$

نتيجة : الدالة الأسية e^{x} (اساس e) هي عكس دالة اللوغاريتم الطبيعي وتستنتج جميع خواصها من هذه الحقيقة.

مبرهنة [4-2]

$$\frac{d}{dx}\left(e^x\right) = e^x$$

البرهان

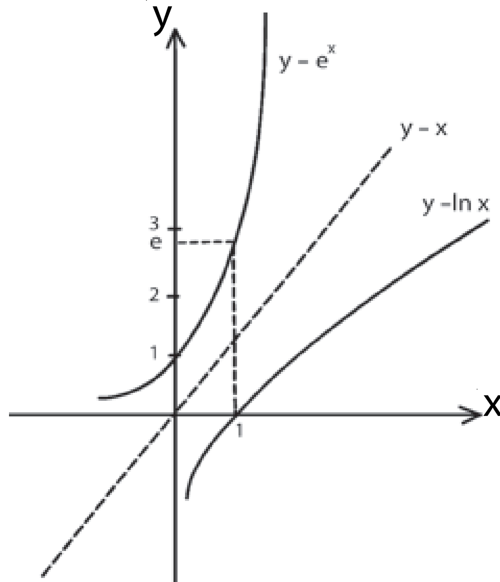
لتكن

$y = e^x$

$\therefore x = \ln y \Rightarrow$

$1 = \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} \Rightarrow$

$\frac{dy}{dx} = y = e^x$



وبصورة عامة

$$\boxed{\frac{d}{dx}\left(e^u\right) = e^u \cdot \frac{du}{dx}}$$

مثال – 3 – لتكن $y = e^{\tan x}$ فجد $\frac{dy}{dx}$.

الحل

$$\frac{d(e^{\tan x})}{dx} = e^{\tan x} \cdot \frac{d(\tan x)}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = e^{\tan x} \cdot \sec^2 x$$

ملاحظة

ان صيغة التفاضل $d\left(e^u\right) = e^u \frac{du}{dx}$ تقودنا الى صيغة التكامل : $\int e^u du = e^u + c$

مثال – 4 – جد $\int x e^{x^2} dx$

الحل

نفرض ان : $x^2 = u \Rightarrow 2x dx = du$

$$\therefore \int e^{x^2} x dx = \frac{1}{2}\int e^u du = \frac{1}{2} e^u + c = \frac{1}{2} e^{x^2} + c$$

تعريف (2 - 4)

اذا كان a عددا موجباً ، فان $a^u = e^{u \ln a}$

مبرهنة [4-3]

$$\frac{da^u}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \ln a$$

البرهان :

$$\frac{da^u}{dx} = \frac{d}{dx}\left(e^{u\ln a}\right)$$

$$= e^{u\ln a} \cdot \frac{d}{dx}(u \ln a)$$

$$\therefore \frac{da^u}{dx} = a^u \cdot \frac{du}{dx} \cdot \ln a$$

مثال – 5–

جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي :

a) $y = 3^{2x-5}$ b) $y = 2^{-x^2}$ c) $y = 5^{\sin x}$

الحل

a) $y = 3^{2x-5} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3^{2x-5} \quad (2).\ln 3$

$= (2\ln 3)\ 3^{2x-5}$

b) $y = 2^{-x^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2^{-x^2} \quad (-2x).\ln 2$

$= (-2x\ln 2)(2^{-x^2})$

c) $y = 5^{\sin x} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 5^{\sin x} \quad .\cos x\left(\ln 5\right)$

$= (\ln 5).5^{\sin x}.\cos x$

تمارين (5-4)

1 – جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $y = \ln 3x$

b) $y = \ln\left(\frac{x}{2}\right)$

c) $y = \ln\left(x^2\right)$

d) $y = (\ln x)^2$

e) $y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)^3$

f) $y = \ln(2 - \cos x)$

g) $y = e^{-5x^2+3x+5}$

h) $y = 9^{\sqrt{x}}$

i) $y = 7^{\frac{-x}{4}}$

j) $y = x^2 e^x$

2 – جد التكاملات الاتية:

a) $\int_0^3 \frac{1}{x+1} dx$

b) $\int_0^4 \frac{2x}{x^2+9} dx$

c) $\int_{\ln 3}^{\ln 5} e^{2x} dx$

d) $\int_0^{\ln 2} e^{-x} dx$

e) $\int_0^1 \left(1+e^x\right)^2 e^x dx$

f) $\int_0^1 \frac{3x^2+4}{x^3+4x+1} dx$

g) $\int_1^4 \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{2\sqrt{x}}$

h) $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sec^2 x}{2+\tan x} dx$

i) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$

j) $\int \cot^3 5x \, dx$

k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\cos x} \sin x \, dx$

l) $\int_1^2 x \, e^{-\ln x} \, dx$

3 – اثبت ان :

a) $\int_{1}^{8} \frac{\sqrt{\sqrt[3]{x}-1}}{\sqrt[3]{x^2}}dx = 2$ b) $\int_{-2}^{4} |3x-6|\, dx = 30$

4 – $f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[-2, 6]$ فاذا كان $\int_{1}^{6} f(x)dx = 6$ وكان

$\int_{-2}^{6} [f(x)+3]\, dx = 32$ فجد $\int_{-2}^{1} f(x)dx$

5 – جد قيمة $a \in R$ اذا علمت أن $\int_{1}^{a} (x+\frac{1}{2})dx = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sec^2 x dx$

6 – لتكن $f(x) = x^2 + 2x + k$ حيث $k \in R$ ، دالة نهايتها الصغرى تساوي (-5) جد $\int_{1}^{3} f(x)dx$

7 – إذا كان للمنحني $f(x) = (x-3)^3 + 1$ نقطة انقلاب (a,b) جد القيمة العددية للمقدار

$$\int_{0}^{b} f'(x)dx - \int_{0}^{a} f''(x)dx$$

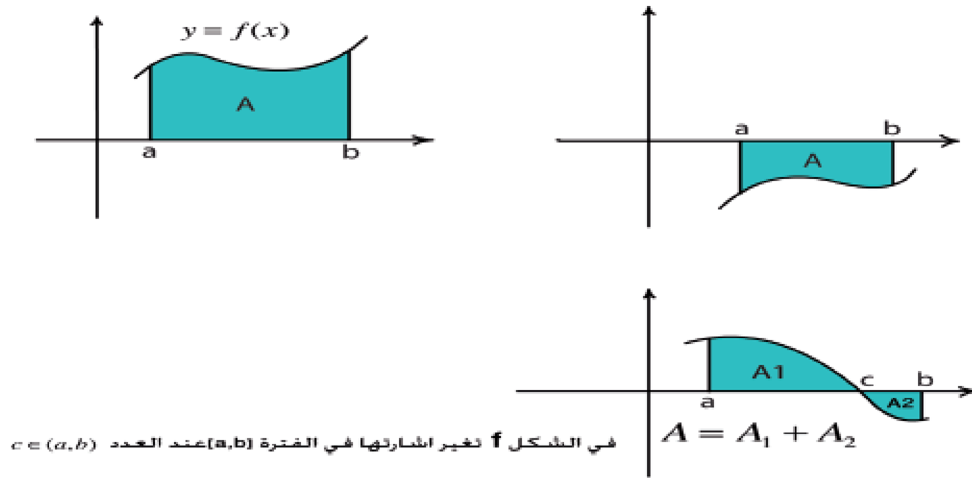
[4-8] إيجاد مساحة المنطقة المستوية.
Plane Area by Definite Integral

[4-8-1] مساحة المنطقة المستوية المحددة بمنحني ومحور السينات
The area between a Curve and the x-axis

لتكن $y = f(x)$ دالة مستمرة على الفترة $[a, b]$ ولتكن A مساحة المنطقة التي يحدها منحني الدالة ومحور السينات والمستقيمين $x = a, x = b$:

اذا كانت $f(x) > 0$ فان المساحة A تساوي : $A = \int_a^b f(x)dx$

إذا كانت $f(x) < 0$ فان المساحة A تساوي : $A = -\int_a^b f(x)dx$



الشكل (4-23)

وعندما يقطع منحني الدالة(y=f(x محور السينات في x=b ، x=a نتبع الخطوات الاتية :

خطوات ايجاد المساحة عندما f تمتلك قيم موجبة وقيم سالبة على الفترة [a,b]:

1. نجد النقاط عندما $f(x)=0$.
2. نستخدم قيم x التي تجعل $f(x)=0$ كموقع على [a,b] لتحصل على فترات جزئية من [a,b] .
3. نجري عملية التكامل على كل فترة جزئية .
4. نجمع القيم المطلقة للتكاملات في الخطوة (3) .

مثال – 1–

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $f(x)=x^3-4x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2,2]$.

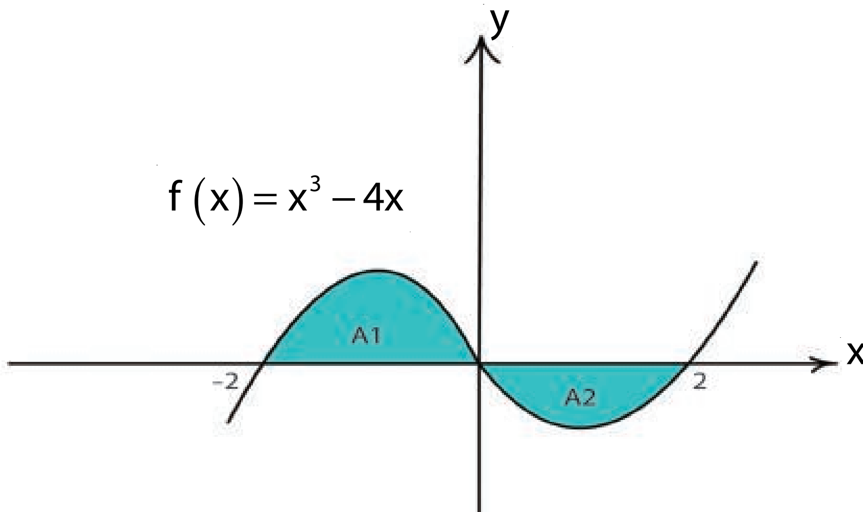
الحل

الخطوة الاولى : نجعل

$$f(x)=0$$
$$\therefore x^3-4x=0$$
$$x(x^2-4)=0$$
$$x(x-2)(x+2)=0$$
$$\therefore x=0 \quad , \quad x=2 \quad , \quad x=-2$$

الخطوة الثانية : فترات التكامل هي : $[0,2]$ ، $[-2,0]$

الخطوة الثالثة :



$$A_1=\int_{-2}^{0}(x^3-4x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=0-[4-8]=4$$

$$A_2=\int_{0}^{2}(x^3-4x)\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{0}^{2}=[4-8]-0=-4$$

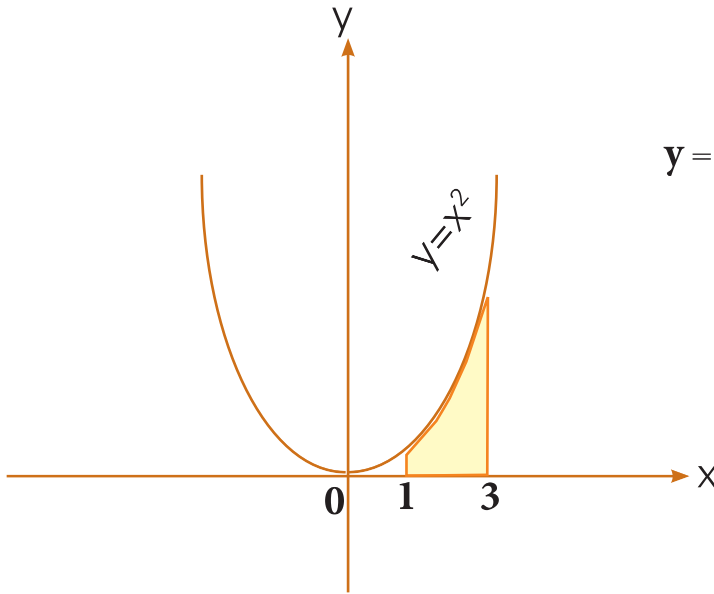
الخطوة الرابعة : جمع القيم المطلقة للتكاملات

$A=|A_1|+|A_2| \Rightarrow A=|4|+|-4| =4+4=8$ وحدة مربعة

مثال - 2-

جد مساحة المنطقة التي يحدها مخطط الدالة $y = x^2$

ومحور السينات والمستقيمان $x = 1 , x = 3$.



الشكل (4-24)

الحل

نقاطع الدالة مع محور السينات بجعل $y = 0$.

$$\therefore x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \notin [1,3]$$

∴ لا تجزئة لفترة التكامل

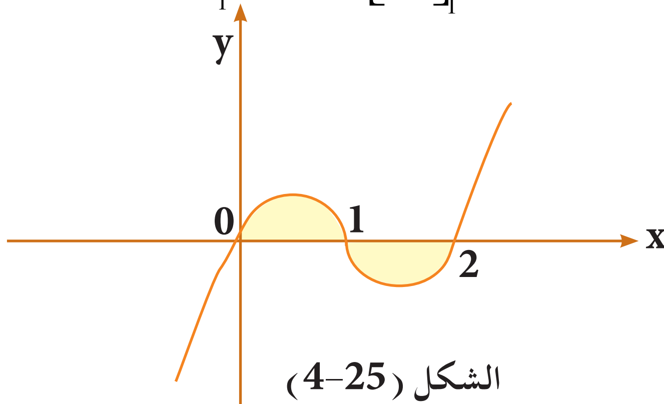
$\because f(x) \geq 0 , \ x \in [1,3]$

$$A = \int_1^3 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{27}{3} - \frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$ وحدة مساحة

مثال - 3-

جد المساحة المحددة بمنحني الدالة

$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$ ومحور السينات .



الشكل (4-25)

الحل

نبحث عن نقاط التقاطع مع محور السينات أي عندما $y = 0$

$$\therefore x^3 - 3x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x-1)(x-2) = 0$$

$$\therefore x = 0, x = 1, x = 2$$

∴ فترات التكامل هنا : $[1,2]$ ، $[0,1]$

$$A_1 = \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^1$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{4} - 1 + 1\right) - (0) = \frac{1}{4}$$

$$A_2 = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 2x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_1^2$$

$$A_2 = (4 - 8 + 4) - (\frac{1}{4} - 1 + 1) = -\frac{1}{4}$$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$\therefore A = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ وحدة مساحة

مثال - 4 -

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $f(x) = x^2 - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-2, 3]$.

الحل

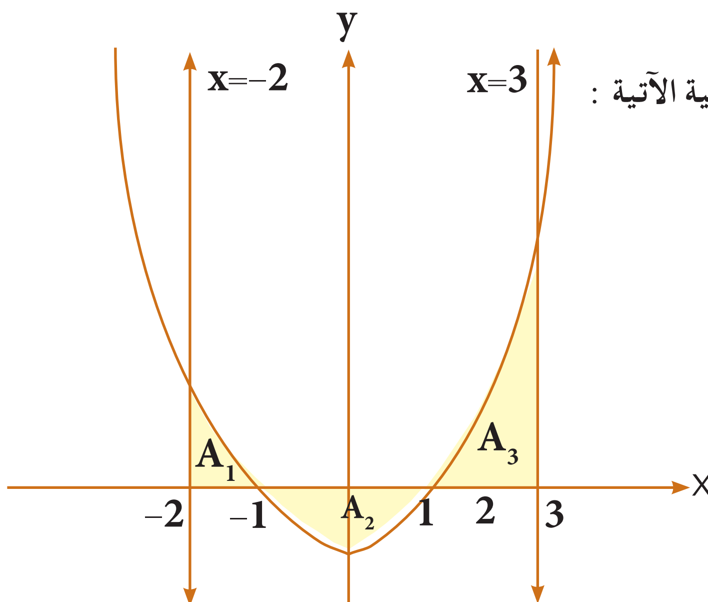
نجد تقاطع المنحني مع محور السينات

$$x^2 - 1 = 0$$

$$\therefore x = \pm 1 \in [-2, 3]$$

$\therefore$ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الآتية :

$[-2,-1]$ ، $[-1,1]$ ، $[1,3]$



الشكل (4-26)

نجد التكاملات :

$$A_1 = \int_{-2}^{-1} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1}$$

$$A_1 = \left[\frac{-1}{3} + 1\right] - \left[\frac{-8}{3} + 2\right] = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$$

$$A_2 = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}$$

$$A_2 = \left[\frac{1}{3} - 1\right] - \left[\frac{-1}{3} + 1\right] = -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$A_3 = \int_{1}^{3} (x^2 - 1)dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{1}^{3}$$

$$A_3 = [9 - 3] - [\frac{1}{3} - 1] = 6 + \frac{2}{3} = \frac{20}{3}$$

$$A = |A_1| + |A_2| + |A_3|$$

نجمع القيم المطلقة للتكاملات :

$$\therefore A = \left|\frac{4}{3}\right| + \left|-\frac{4}{3}\right| + \left|\frac{20}{3}\right| = 9\frac{1}{3}$$ وحدة مساحة

مثال – 5–

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y = \sin x$ ومحور السينات وعلي الفترة $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

الحل

نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات وعلى الفترات $\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

$$\because \ \sin x = 0 \Rightarrow x = 0 + n\pi \ , n \in Z$$

$$\therefore \quad n = 0 \Rightarrow x = 0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

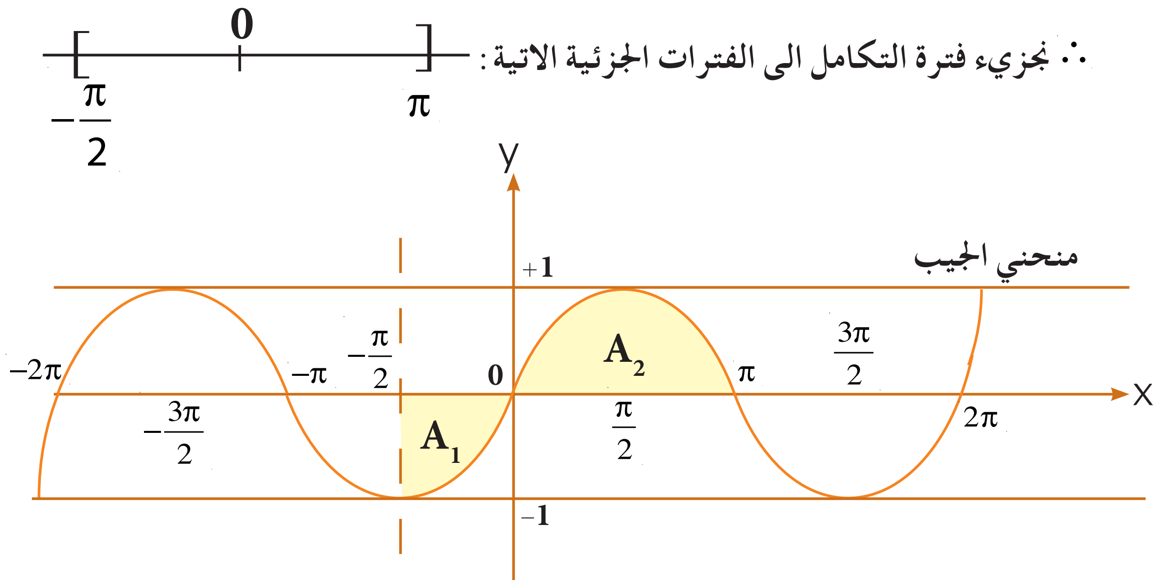
$$n = 1 \Rightarrow x = \pi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$n = 2 \Rightarrow x = 2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$n = -1 \Rightarrow x = -\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$n = -2 \Rightarrow x = -2\pi \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

∴ نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية :



الشكل (4–27)

ثم نجد التكامل كما يأتي :

$$A_1=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\sin x\ dx=[-\cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{0}=-\cos(0)+\cos(-\frac{\pi}{2})$$

$$A_1= -1+0 = -1$$

$$A_2=\int_{0}^{\pi}\sin x\ dx=[-\cos x]_0^{\pi}=-\cos\pi+\cos 0$$

$$A_2= 1+1=2$$

$$A= |A_1|+|A_2|$$

$\therefore A=|-1|+|2| \Rightarrow A= 3$ وحدة مساحة

مثال – 6–

جد مساحة المنطقة المحددة بمنحني الدالة $y=\cos x$ ومحور السينات وعلى الفترة $[-\pi,\pi]$

الحل

نجد نقاط تقاطع الدالة مع محور السينات :

$$\cos x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}+n\pi\ ,\ n\in Z$$

$\therefore$

$n=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{2}\in[-\pi,\pi]$

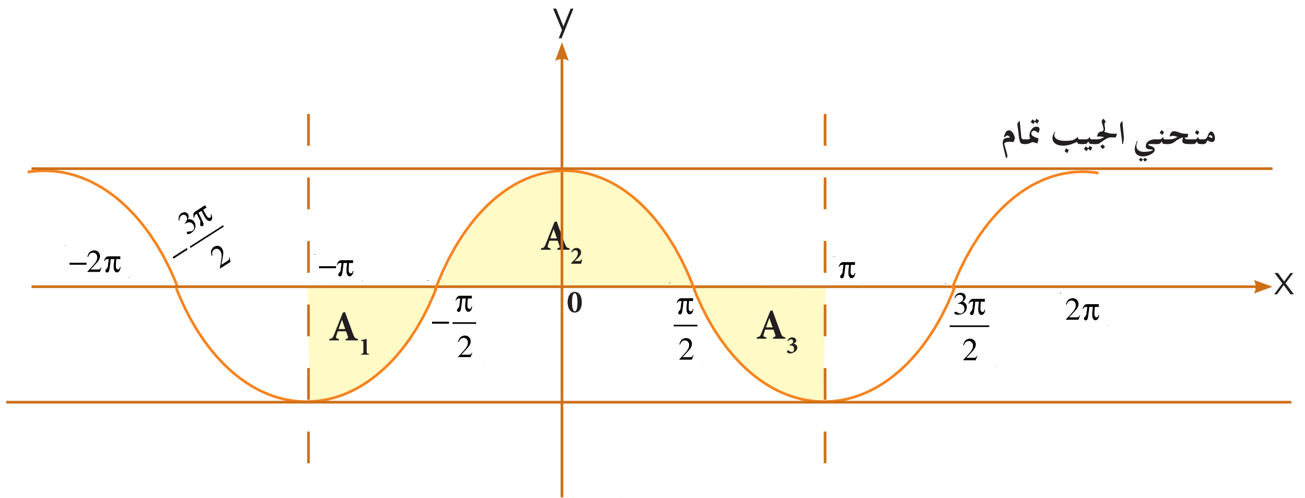
$n=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}\in[-\pi,\pi]$

$n=1 \Rightarrow x=\frac{3\pi}{2}\notin[-\pi,\pi]$

$n=-2 \Rightarrow x=-\frac{3\pi}{2}\notin[-\pi,\pi]$

نجزيء فترة التكامل الى الفترات الجزئية الاتية

$$\left[-\pi,-\frac{\pi}{2}\right],\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right],\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$$



الشكل (4−28)

نجد التكاملات :

$$A_1=\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}}$$

$$A_1=\sin(-\frac{\pi}{2})-\sin(-\pi)=-\sin\frac{\pi}{2}+\sin\pi=-1+0=-1$$

$$A_2=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x \, dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2}-\sin(-\frac{\pi}{2})=1+1=2$$

$$A_3=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sin\pi-\sin\frac{\pi}{2}=0-1=-1$$

نجد مجموع القيم المطلقة للتكاملات : $A=|A_1|+|A_2|+|A_3|$

$A=|-1|+|2|+|-1|=1+2+1=4$ وحدة مساحة

[2-8-4] مساحة المنطقة المحددة بمنحنيين

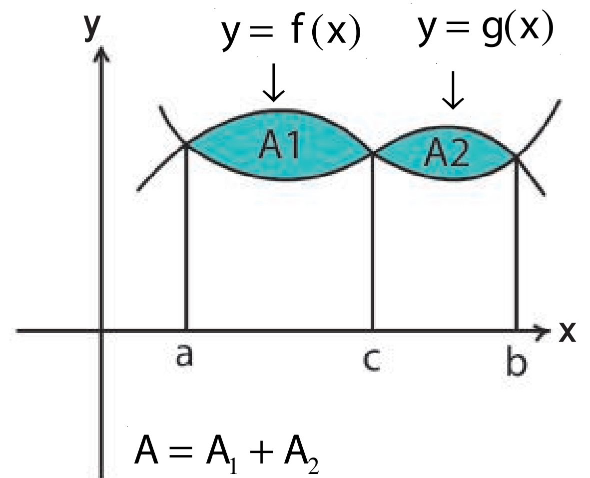
سبق وأن درسنا كيفية أيجاد المساحة بين منحني دالة ومحور السينات ومستقيمين والآن سندرس كيفية إيجاد مساحة المنطقة المحصور بين منحنيين :

لتكن $f(x), g(x)$ دالتين مستمرتين على الفترة $[a,b]$ فان مساحة المنطقة **A** المحصورة بين المنحنيين نجدها كما يأتي :

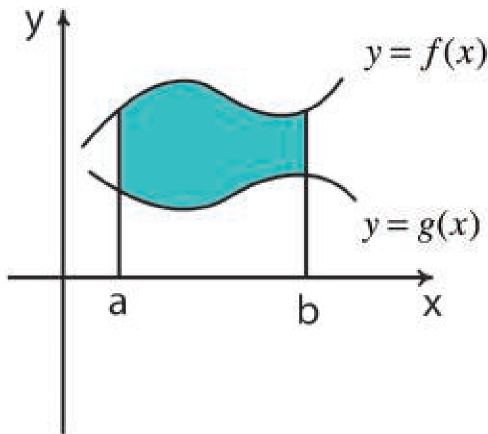
1) اذا كان $f(x) > g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

2) اذا كانت $f(x) < g(x)$ في الفترة $[a,b]$ فالمساحة A هي $A = -\int_a^b [f(x)-g(x)]dx$

3) اذا تقاطع المنحنيان بين $[a,b]$ نجد نقاط التقاطع وذلك بجعل $f(x) = g(x)$ ثم نجد قيم x التي تنتمي الى (a,b) ونجزئة $[a,b]$ الى فترات جزئية ثم نجد تكامل الفرق بين الدالتين في كل فترة جزئية ثم بعد ذلك نجد مجموع مطلق التكاملات والتي تمثل المساحة المطلوبة .



$$A = \int_a^c [f(x)-g(x)]dx + \int_c^b [g(x)-f(x)]dx$$



$f(x) > g(x)$ في الفترة $[a,b]$

$$A = \int_a^b [f(x)-g(x)]dx$$

مثال -1-

جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحني $y=\sqrt{x}$ والمستقيم $y=x$

الحل

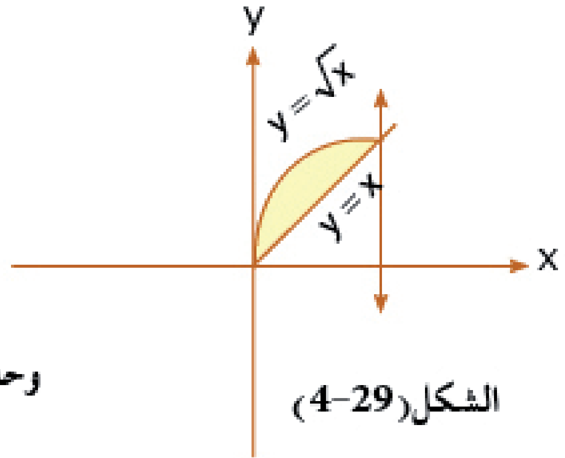
نجد تقاطع المنحنيين: $\sqrt{x}=x$

$$\therefore x=x^2 \Rightarrow x(x-1)=0$$

$$\therefore x=0, x=1 \Rightarrow x\in[0,1]$$

$$A=\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1$$

$$=\left[\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]-[0]=\frac{1}{6} \quad \therefore A=\left|\frac{1}{6}\right|=\frac{1}{6}$$ وحدة مساحة



الشكل (4-29)

مثال -2-

جد مساحة المنطقة المحصورة بين المنحني $y=x^3$ والمستقيم $y=x$

الحل

تقاطع الدالتين $x^3=x$

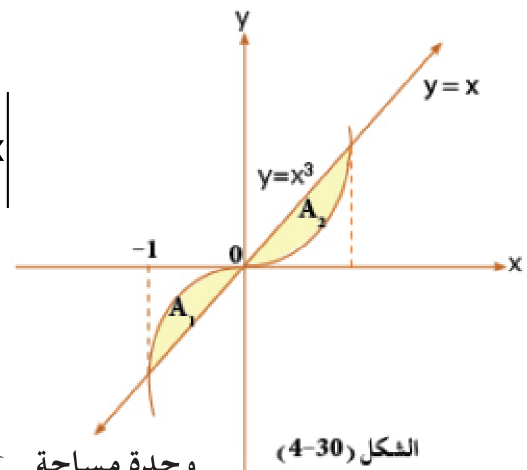
$$x^3-x=0 \Rightarrow x(x-1)(x+1)=0$$

$$x=0,\ x=1,\ x=-1 \Rightarrow [-1,0],[0,1]$$

$$A=|A_1|+|A_2|=\left|\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx\right|+\left|\int_0^1(x^3-x)dx\right|$$

$$=\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}\right|+\left|\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_0^1\right|$$

$$=\left|0-(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})\right|+\left|(\frac{1}{4}-\frac{1}{2})-(0)\right|=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{2}$$ وحدة مساحة

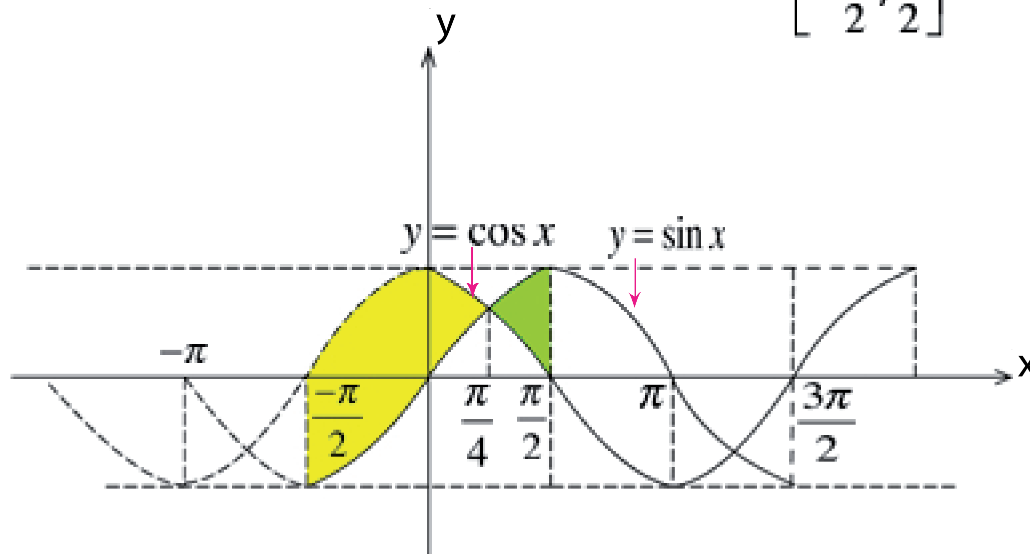


الشكل (4-30)

مثال -3- جد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $f(x) = \cos x$, $g(x) = \sin x$ وعلى الفترة

$$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

الحل



تقاطع الدالتين $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1$

$$\therefore x = \begin{cases} \frac{\pi}{4} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ \frac{5\pi}{4} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

∴ تجزئ التكامل $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right], \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$A = |A_1| + |A_2|$$

$$\therefore A = \left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \sin x)dx\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos x - \sin x)dx\right|$$

$$= \left|[\sin x + \cos x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}\right| + \left|[\sin x + \cos x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right|$$

$$= \left|(\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}) - (\sin\frac{-\pi}{2} + \cos\frac{-\pi}{2})\right| + \left|(\sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2}) - (\sin\frac{\pi}{4} + \cos\frac{\pi}{4}\right|$$

$$A = \left|\sqrt{2} + 1\right| + \left|1 - \sqrt{2}\right| = \sqrt{2} + 1 + \sqrt{2} - 1 = 2\sqrt{2}$$ وحدة مساحة

[4-8-3] المسافة The Distance

لتكن $V(t)$ سرعة جسم يتحرك على خط مستقيم وفي مستوٍ فأن المسافة المقطوعة في الفترة الزمنية $[t_1, t_2]$ هي :

$$d = \int_{t_1}^{t_2} |V(t)|dt$$

حيث d تمثل المسافة، المسافة كمية غير متجهة أما الازاحة s والسرعة v والتعجيل a فان كلاً منها كمية متجهة لذا فان :

$$S = \int_{t_1}^{t_2} V(t)\, dt$$ و $$v = \int a(t)dt$$

مثال - 1 -

جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $V(t) = 2t - 4 \text{ m/s}$

فجد :

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

b) الازاحة المقطوعة في الفترة $[1,3]$

c) المسافة المقطوعة في الثانية الخامسة

d) بعده بعد مضي (4) ثواني من بدء الحركة.

الحل

a) من الواضح أن الجسم يغير اتجاهه

$$\therefore 2t - 4 = 0 \Rightarrow t = 2 \in [1,3] \Rightarrow [1,2],[2,3]$$

$$\therefore d = \left|\int_1^2 (2t-4)dt\right| + \left|\int_2^3 (2t-4)dt\right| = \left|\left[t^2 - 4t\right]_1^2\right| + \left|\left[t^2 - 4t\right]_2^3\right|$$

$$= |(4-8)-(1-4)| + |(9-12)-(4-8)| = 1 + 1 = 2m$$

b) $s = \int_1^3 (2t-4)dt = [t^2-4t]_1^3 = [9-12]-[1-4] = 0$

c) $d = \left| \int_4^5 (2t-4)dt \right| = \left| [t^2-4t]_4^5 \right| = \left| [25-20]-[16-16] \right| = 5m$

d) $s = \int_0^4 (2t-4)dt = [t^2-4t]_0^4 = [16-16]-[0] = 0$

مثال – 2–

جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(18)\ m/s^2$ فأذا كانت سرعته قد أصبحت $(82)m/s$ بعد مرور **4** ثواني من بد الحركة جد :

a) المسافة خلال الثانية الثالثة

b) بعده عن نقطة بدء الحركة بعد مرور **3** ثواني

الحل

a) $V = \int a(t)dt \Rightarrow V = \int 18dt$

$\therefore V = 18t + c$ $\qquad V = 82, t = 4$

$82 = (18 \times 4) + c \Rightarrow c = 10$

$\therefore V = 18t + 10$

بما أن

$18t + 10 > 0 \Rightarrow V > 0$

$$\therefore d = \int_2^3 (18t+10)\,dt = \left[9t^2+10t\right]_2^3 = [81+30]-[36+20] = 55m$$

b) $S = \int_0^3 (18t+10)\,dt = \left[9t^2+10t\right]_0^3 = [81+30]-[0] = 111m$

تمارين (6-4)

1. جد المساحة المحددة بالمنحني $y = x^4 - x$ ومحور السينات والمستقيمين $x=-1$, $x=1$.

2. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ وعلى الفترة $[-2,3]$ ومحورالسينات.

3. جد المساحة المحددة بالدالة $f(x) = x^4 - x^2$ ومحور السينات.

4. جد المساحة المحددة بالمنحني $y=\sin 3x$ ومحور السينات وعلى الفترة $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

5. جد المساحة المحددة بالمنحني $y = 2\cos^2 x - 1$ ومحور السينات وعلى الفترة $[0,\frac{\pi}{2}]$.

6. جد المساحة المحددة بالدالتين $y = \frac{1}{2}x, y = \sqrt{x-1}$ وعلى الفترة $[2,5]$

7. جد المساحة المحددة بالدالتين $y = x^2 , y = x^4 - 12$.

8. جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = \sin x, g(x) = \sin x \cos x$ حيث $x \in [0, 2\pi]$

9. جد المساحة المحددة بالدالتين $f(x) = 2\sin x + 1, g(x) = \sin x$ حيث $x \in \left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$

10. جد المساحة المحددة بالدالة $y = x^3 + 4x^2 + 3x$ ومحور السينات.

11 . جسم يتحرك على خط مستقيم بسرعة $v(t)=(3t^2-6t+3)\, m/s$ إحسب :

a) المسافة المقطوعة في الفترة $[2,4]$

b) الازاحة في الفترة $[0,5]$

12 . جسم يتحرك على خط مستقيم بتعجيل قدره $(4t+12)\, m/s^2$ وكانت سرعته بعد مرور (**4**) ثواني تساوي $90 m/s$ إحسب :

a) السرعة عندما **t=2**

b) المسافة خلال الفترة [**1,2**]

c) الازاحة بعد (**10**) ثواني من بدء الحركة

13 . تتحرك نقطة من السكون وبعد **t** ثانية من بدء الحركة أصبحت سرعتها $(100t-6t^2)\ m/s$ أوجد الزمن اللازم لعودة النقطة الى موضعها الاول الذي بدأت منه ، ثم احسب التعجيل عندها

[4-8] الحجوم الدورانية: Volumes of Revolution

1. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $y=f(x)$ المستمرة من $x=a$ الى $x=b$ حول محور السينات

نطبق العلاقة التالية

$$V=\pi\int_a^b y^2dx$$

2. لحساب حجم الشكل المتولد من دوران المنطقة المحددة بين منحني الدالة $x=f(y)$ المستمرة من $y=a$ الى $y=b$ حول محور الصادات

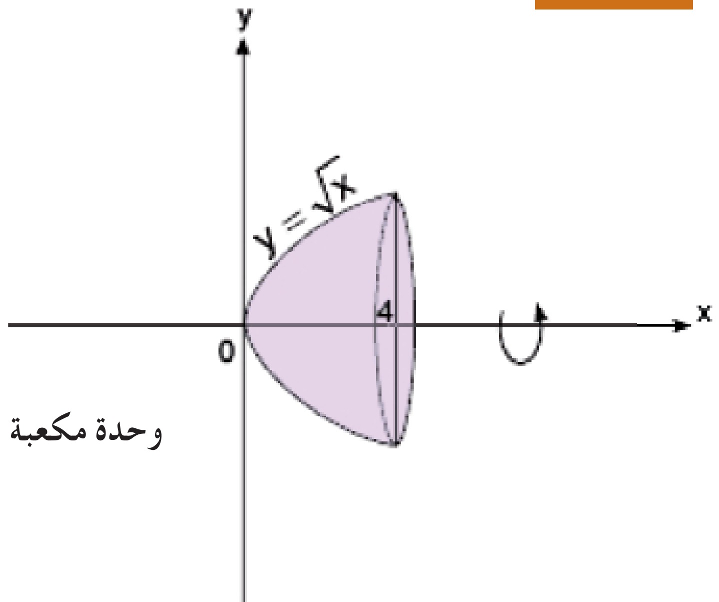
نطبق العلاقة التالية :

$$V=\pi\int_a^b x^2dy$$

مثال - 1 -

المنطقة المحددة بين المنحني $y=\sqrt{x}$, $0\le x\le 4$ ومحور السينات ، دارت حول محور السينات ، جد حجمها .

الحل



$$v=\int_a^b \pi y^2dx$$

$$=\int_0^4 \pi(\sqrt{x})^2dx=\int_0^4 \pi x\ dx$$

$$=\left[\pi\frac{x^2}{2}\right]_0^4=8\pi-0=8\pi$$ وحدة مكعبة

مثال – 2–

المنطقة المحددة بين المنحني $1 \le y \le 4$ ، $x = \frac{1}{\sqrt{y}}$ دارت حول محور الصادات . جد حجمها .

الحل

$$v = \int_1^4 \pi x^2 dy = \int_1^4 \frac{\pi}{y} dy = [\pi \ln y]_1^4 = \pi \ln 4 - 0 = 2\pi \ln 2$$ وحدة مكعبة

مثال – 3–

أوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y^2 = 8x$ والمستقيمين $x=0$, $x=2$ حول المحور السيني .

الحل

$$v = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^2 8x\, dx = 4\pi \left[x^2\right]_0^2 = 16\pi$$ وحدة مكعبة

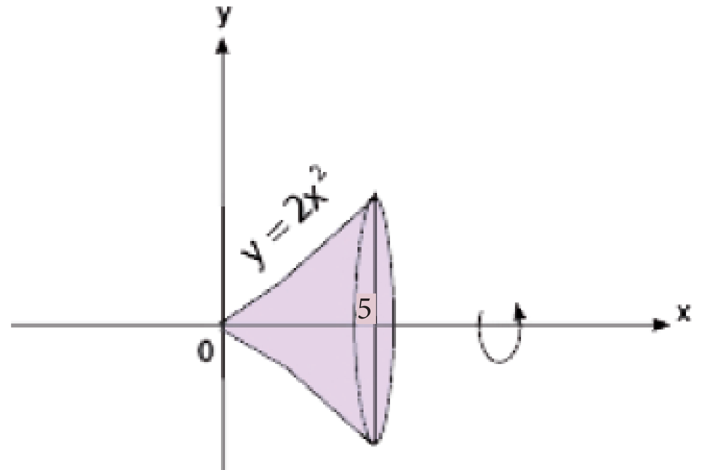
مثال – 4–

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ الذي معادلته $y = 2x^2$ والمستقيم $x = 0, x = 5$ حول المحور السيني .

الحل

$$v = \pi \int_a^b \pi v^2 dx = \pi \int_0^5 4x^4\, dx = \frac{4\pi}{5}\left[x^5\right]_0^5$$

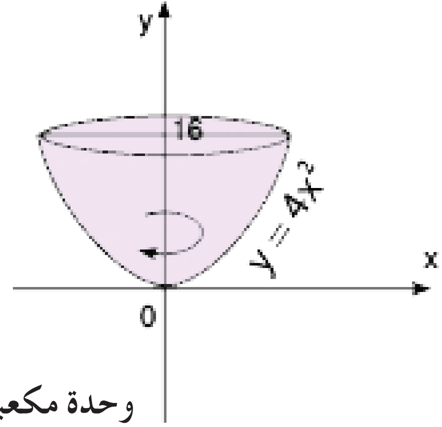
$$= \frac{4\pi}{5} \times 3125 = 2500\pi$$ وحدة مكعبة



مثال – 5–

اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = 4x^2$ والمستقيمين y=16 , y=0 حول المحور الصادي.

الحل



$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

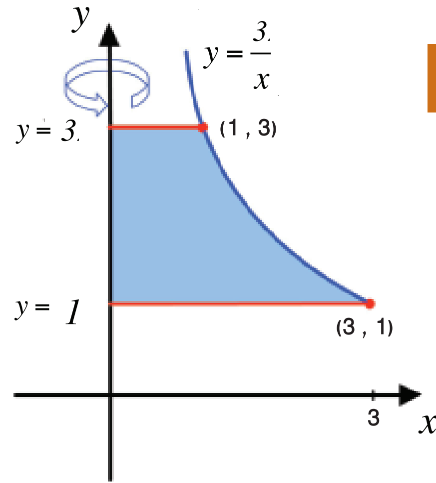
$$v = \pi \int_0^{16} \frac{y}{4} dy = \frac{\pi}{8}\left[y^2\right]_0^{16} = \frac{\pi}{8}[16 \times 16] = 32\pi$$

وحدة مكعبة

مثال – 6–

اوجد الحجم الناشيء من دوران المنطقة المحصورة بين محور الصادات ومنحني الدالة $y = \frac{3}{x}$ ، $1 \le y \le 3$ ، دورة كاملة حول المحور الصادي .

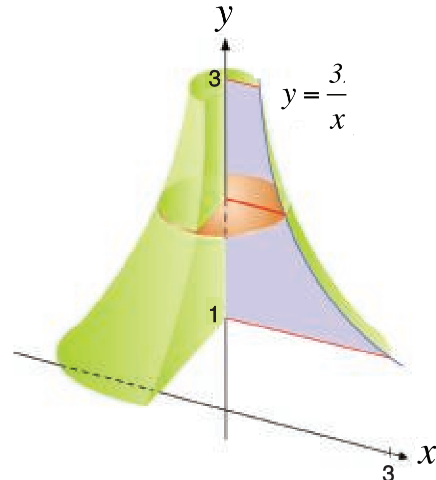
الحل



$$v = \pi \int_a^b x^2 dy$$

$$v = \pi \int_1^3 \left[\frac{3}{y}\right]^2 dy = 9\pi \left[\frac{-1}{y}\right]_1^3$$

$$= 9\pi \left[\frac{-1}{3} + 1\right] = 6\pi \ \ Unit^3$$



تمارين (7-4)

1. اوجد الحجم الدوراني المتولد من دوران المساحة المحددة بالقطع المكافئ $y = x^2$ والمستقيمين $x = 1, x = 2$ حول المحور السيني.

2. اوجد الحجم الناتج من دوران المساحة المحصورة بين منحني الدالة $y = x^2 + 1$ والمستقيم $y=4$ حول المحور الصادي.

3. احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 + x = 1$ والمستقيم $x=0$ حول المحور الصادي.

4. احسب الحجم المتولد من دوران المساحة المحصورة بين المنحني $y^2 = x^3$ والمستقيمان $x = 0, x = 2$ حول المحور السيني.

5

الفصل الخامس

Chapter Five

المعادلات التفاضلية الاعتيادية

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
المعادلة التفاضلية الاعتيادية	O . D . E
المعادلة المتجانسة	$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

[5-1] مقدمة

يعتبر موضوع المعادلات التفاضلية من المواضيع الاساسية في الرياضيات التطبيقية لكثرة ظهورها في المسائل العلمية والهندسية . في هذا الفصل سنتطرق وبشكل مبسط للمعادلةالتفاضلية وكيفية حلها .

Definition تعـــريــف [5-1]

المعادلة التفاضلية (**Differential Equation**) هي المعادلة التي تحتوي على مشتقة واحدة او أكثر للدالة المجهولة في المعادلة (اي للمتغير التابع في المعادلة)

ملاحظة

المعادلة التفاضليــــة الاعتيادية هـــي علاقــة بين متغير مستقـل (Independt Variable) وليكن (x) ودالته غيـــر المعروفــة (y) (Dependt Variabie) وبعض مشتقـــات (y) بالنسبـــة الى (x) ويـــرمـــز لهـــا O . D . E والتـــي هـــي مختصـــر الى (Ordinary Differential Equation)

مثلاً :

1) $\frac{dy}{dx} = 3y - 4x$

2) $x^2y'' + 5xy' - x^3y = 0$

3) $\frac{d^3y}{dx^3} + \frac{dy}{dx} = y - 4$

4) $y' + x^2y + x = y$

5) $(y'')^3 + 2y' + x^2 \ln x = 5$

6) $y^{(4)} + \cos y + x^2y\ y' = 0$

كلها معادلات تفاضلية اعتيادية لان المتغير y يعتمد فقط على المتغير X

تعـــريـف [5-2]

المرتبة او (الرتبة) **Order** : تعرف رتبة المعادلة التفاضلية بانها رتبة اعلى مشتقة .

الدرجة **Degree** : تعرف درجة المعادلة التفاضلية بأنها : اكبر قوة (أس) مرفوعة له اعلى مشتقة في المعادلة التفاضلية .

مثلاً :

1) $\frac{dy}{dx}+x-7y=0$ من الرتبة الاولى والدرجة الاولى

2) $\frac{d^2y}{dx^2}=5x-3xy+7$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

3) $(y''')^3+y'-y=0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثالثة

4) $y''+2y(y')^3=0$ من الرتبة الثانية والدرجة الاولى

5) $(\frac{dy}{dx})^4=x^3-5$ من الرتبة الاولى والدرجة الرابعة

6) $x^2(\frac{dy}{dx})^4+(\frac{d^3y}{dx^3})^2+2\frac{d^2y}{dx^2}=0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الثانية

7) $y^{(4)}+\cos y+x^2y\,y'=0$ فهي من الرتبة الرابعة والدرجة الاولى

ملاحظة

درجة المعادلة التفاضلية التي تكون جبرية في مشتقاتها هي الدرجة الجبرية للمشتقة ذات اعلى رتبة تظهر في المعادلة . فمثلا المعادلة التفاضلية : $(y'')^2=\sqrt{1+(y')^2}$
من الرتبة الثانية لان اعلى مشتقة فيها y''

حيث يمكن ازالة الجذور او الاسس الكسرية ونحصل على : $(y'')^4=1+(y')^2$
وبذلك تكون درجة المعادلة التفاضلية الرابعة

[5-2] حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية
Solution of an Ordinary Differential Equation

ان الغاية من دراسة المعادلات التفاضلية هي كيفية أيجاد حلولاً لها ، ويتم ذلك بأيجاد علاقة بين المتغير التابع (غير المستقل) y والمتغير المستقل x بحيث تكون العلاقة خالية من الاشتقاقات وان تحقق المعادلة التفاضلية عند التعويض

تعــــريـــف [5-3] Definition

حل المعادلة التفاضلية هو اية علاقة بين متغيرات المعادلة التفاضلية بحيث ان هذه العلاقة :

أ) خالية من المشتقة

ب) معرفة على فترة معينة

جـ) تحقق المعادلة التفاضلية

اي ان الحل للمعادلة التفاضلية الاعتيادية هو اي دالة لمجهول (المتغير التابع) بدلالة المتغير المستقل تحقق المعادلة التفاضلية .

مثال - 1 -

بين ان العلاقة $y=x^2+3x$ حلاً للمعادلة التفاضلية $xy'=x^2+y$

الحل

$y=x^2+3x$ نجد y' فيكون :

$$y=x^2+3x \quad ...(1) \Rightarrow y'=2x+3 \quad ...(2)$$

نعوض (1) و (2) في الطرف الايمن والايسر للمعادلة التفاضلية وكما يلي :

$$LHS=xy'$$
$$=x(2x+3)=2x^2+3x$$
$$RHS=x^2+y=x^2+x^2+3x$$
$$=2x^2+3x=LHS$$

اذاً العلاقة المعطاة هي حل للمعادلة التفاضلية اعلاه

[3 - 5] الحل الخاص والعام للمعادلة التفاضلية الاعتيادية:

ان حل المعادلة التفاضلية الاعتيادية كما اسلفنا هو اي علاقة بين y,x تحقق المعادلة ، غير ان الحل العام لاي معادلة تفاضلية هو الحل المشتمل على عدد من الثوابت الاختيارية مساوٍ لرتبة المعادلة ، فاذا كانت المعادلة من الرتبة الاولى وجب ان يكون حلها العام مشتملاً على ثابت اختياري واحد هو ثابت التكامل الذي يظهر عند اجراء خطوة التكامل الوحيدة لمعادلات الرتبة الاولى . اما اذا كانت المعادلة من الرتبة الثانية وجب اشتمال حلها على ثابتي تكامل نظراً لاجراء خطوتي تكامل عند حل معادلة الرتبة الثانية وهكذا . . .

فعلى سبيل المثال : $\frac{dy}{dx}-5y=0$

تعتبر معادلة تفاضلية من الرتبة الاولى ويحققها الحل الخاص $y=e^{5x}$ كما يبدو من التعويض في المعادلة التفاضلية غير ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابت اختياري واحد c ، فيكون $y=ce^{5x}$

اما المعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2}+y=0$ فهي من الرتبة الثانية وتحققها الحلول الخاصة :

$y=\sin x, y=\cos x$ غير ان حلها العام يجب ان يشتمل على ثابتي تكامل اختياريين، كان يكونا A,B ويصبح الحل العام عندئذ بالصورة $y=A\sin x+B\cos x$

مثال - 2- اثبت ان $y=x\ln|x|-x$ احد حلول المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx}=x+y\ ,\ \ x>0....(1)$$

الحل ان المعادلة $y=x\ln|x|-x$ خالية من المشتقات ومعرفة في $x>0$ ولكي نثبت انها احد حلول المعادلة التفاضلية (1) نقوم بالتعويض المباشر في (1)

$$LHS=x\frac{dy}{dx}=x(x.\ \frac{1}{x}+\ln|x|(1)-1)$$

$$=x.(\cancel{1}+\ln|x|-\cancel{1})=x\ln|x|$$

$$RHS=x+y=x+x\ln|x|-x=x.\ln|x|$$

اذاً الدالة المعطاة هي احد الحلول الخاصة للمعادلة التفاضلية (1) .

مثال – 3–

بين ان $\ln y^2 = x+a$ ، $a \in R$ ، حلاً للمعادلة $2y' - y = 0$

الحل

$$\ln y^2 = x+a \Rightarrow 2\ln|y| = x+a \Rightarrow 2\frac{1}{y}(y') = 1$$

$$\Rightarrow 2y' = y \Rightarrow 2y' - y = 0$$

$\therefore$ $\ln y^2 = x+a$ حلاً للمعادلة اعلاه

مثال – 4–

هل $y = x^3 + x - 2$ حلاً للمعادلة التفاضلية $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل

$$y = x^3 + x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = 6x$$

وعليه $y = x^3 + x - 2$ هو حلاً للمعادلة $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$

مثال - 5-

برهن ان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + 4y = 0$.

الحل

$$\because\ y = 3\cos 2x + 2\sin 2x \quad \ldots (1)$$
$$\therefore\ y' = -6\sin 2x + 4\cos 2x$$
$$y'' = -12\cos 2x - 8\sin 2x \quad \ldots (2)$$

بالتعويض عن ① ، ② في الطرف الايسر للمعادلة التفاضلية ينتج:

$$LHS = (-12\cos 2x - 8\sin 2x) + 4(3\cos 2x + 2\sin 2x) \Rightarrow$$
$$-12\cos 2x - 8\sin 2x + 12\cos 2x + 8\sin 2x = 0$$ الطرف الايمن
$$= RHS$$

وعليه فان $y = 3\cos 2x + 2\sin 2x$ هو حلاً للمعادلة اعلاه.

مثال - 6-

هل $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حلاً للمعادلة $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$ ؟

الحل

$$\because\ y^2 = 3x^2 + x^3 \Rightarrow 2yy' = 6x + 3x^2 \Rightarrow$$
$$2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x$$

بالقسمة على 2

$$yy'' + (y')^2 = 3 + 3x \Rightarrow LHS = yy'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$$ الطرف الايمن
$$\neq RHS$$

وعليه فان $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلاً للمعادلة اعلاه

مثال – 7-

بين ان $y = e^{2x} + e^{-3x}$ هو حلاً للمعادلة التفاضلية $y'' + y' - 6y = 0$.

الحل

$$\because y = e^{2x} + e^{-3x} \Rightarrow y' = 2e^{2x} - 3e^{-3x} \Rightarrow y'' = 4e^{2x} + 9e^{-3x}$$

وبالتعويض في الطرف الايسر للمعادلة

$$LHS = y'' + y' - 6y$$

$$= \left(4e^{2x} + 9e^{-3x}\right) + \left(2e^{2x} - 3e^{-3x}\right) - 6\left(e^{2x} + e^{-3x}\right)$$

$$= 4e^{2x} + 9e^{-3x} + 2e^{2x} - 3e^{-3x} - 6e^{2x} - 6e^{-3x}$$

$= \mathbf{0} =$ الطرف الايمن

$= RHS$

وعليه يكون $y = e^{2x} + e^{-3x}$ حلاً للمعادلة اعلاه

تمارين (1-5)

1. بين رتبة ودرجة كل من المعادلات التفاضلية الآتية:

a) $(x^2-y^2)+3xy\frac{dy}{dx}=0$

b) $\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-5y=7$

c) $(y''')^3-2y'+8y=x^3+\cos x$

d) $(\frac{d^3y}{dx^3})^2-2(\frac{dy}{dx})^5+3y=0$

2. برهن ان $y=\sin x$ هو حل للمعادلة $y''+y=0$

3. برهن ان العلاقة $s=8\cos 3t+6\sin 3t$ هي حل للمعادلة $\frac{d^2s}{dt^2}+9s=0$

4. هل ان $y=x+2$ حلاً للمعادلة $y''+3y'+y=x$ ؟

5. هل $y=\tan x$ حلاً للمعادلة $y''=2y(1+y^2)$ ؟

6. هل $2x^2+y^2=1$ حلاً للمعادلة $y^3y''=-2$ ؟

7. هل $yx=\sin 5x$ حلاً للمعادلة $xy''+2y'+25yx=0$ ؟

8. بين ان $y=ae^{-x}$ هو حلاً للمعادلة $y'+y=0$ حيث $a\in R$

9. بين ان $\ln|y|=x^2+c$ ، $c\in R$ هو حلاً للمعادلة $y''=4x^2y+2y$

[5-4] المعادلات التفاضلية الاعتيادية من المرتبة الاولى والدرجة الاولى

مقدمة :

ان حل المعادلة التفاضلية هو عمل معاكس لعملية التفاضل ، أي يقوم على عمليات التكامل ، ومن المعروف انه لا يمكن ايجاد عكس تفاضل (الصورة المباشرة) لكل دالة . اي لا نتوقع ان يكون لكل معادلة تفاضلية حل عام بدلالة الدوال الاولية المعروفة . وعليه فالمعادلات التفاضلية التي يمكن حلها تقسم الى انواع متعددة حسب طريقة الحصول على حلها العام.

وفي هذا الفصل سوف نستعرض المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى والدرجة الاولى بمتغيرين y , x .

ومع ان هذا النوع من المعادلات التفاضلية قد تبدو بسيطة إلا أنه ليس من الممكن ايجاد حل عام لاي منها بصورة عامة ، ولا توجد طريقة عامة للحل . وعليه فسوف نقسم هذه المعادلات والتي يمكن ايجاد حلها بطريقة مباشرة الى عدة انواع ، اهمها :

1. المعادلات التي تنفصل متغيراتها .
2. معادلات تفاضلية من النوع المتجانس .
3. معادلات تفاضلية تامة.
4. معادلات تفاضلية خطية - معادلة برنولي .

وفي هذا الفصل سنقتصر على النوعين (1) و (2) وطرائق حليهما.

فمثلاً تأخذ المعادلة التفاضلية من المرتبة الاولى والدرجة الاولى الشكلين الاتيين:

$$1)\ \frac{dy}{dx} = F(x,y)$$

$$2)\ M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$$

حيث $M(x,y) \neq 0$, $N(x,y) \neq 0$

فالمعادلة التفاضلية : $\frac{dy}{dx} = \frac{3xy}{x+y}$ مثلاً

يمكن ان تكتب بالشكل

$$(3xy)\,dx = (x+y)\,dy$$

$$(3xy).dx - (x+y).dy = 0$$

حيث ان $M = 3xy$, $N = (x+y)$

في البند اللاحق سندرس بعض طرق حل المعادلة التفاضلية.

[5-5] بعض طرق حل المعادلات التفاضلية

اولاً : المعادلات التي تنفصل متغيراتها Separation of Variables

في هذا النوع من المعادلات وكما يظهر من اسمها نستطيع ان نعزل كل الحدود التي تحتوي على x فقط مع dx في جانب والحدود التي تحتوي على y فقط مع dy في الجانب الاخر فنحصل على :

$$f(x).dx = g(y)dy \ldots (1)$$

ثم نكامل طرفي المعادلة (1) فيكون

$$\int g(y)dy = \int f(x)dx + c$$

حيث c ثابت اختياري (Arbitrary Constant)

مثال - 1 - حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 2x+5$

الحل

$$\frac{dy}{dx} = 2x+5 \Rightarrow dy = (2x+5)\,dx$$

$$\int dy = \int (2x+5)dx \Rightarrow y = x^2 + 5x + c$$

مثال - 2 - حل المعادلة $\frac{dy}{dx} = \frac{x-1}{y}$

الحل

نجعل المعادلة بالصورة $g(y)dy = f(x)dx$

اي :

$$ydy = (x-1)dx$$

باخذ التكامل للطرفين :

$$\int ydy = \int (x-1)dx$$

$$\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 - x + c$$

$$y^2 = x^2 - 2x + 2c \Rightarrow y = \pm(x^2 - 2x + 2c)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \pm(x^2 - 2x + c_1)^{\frac{1}{2}}$$

(لكون c ثابت اختياري فان 2c ثابت اختياري ايضاً اسميناه c_1)

مثال – 3-

حل المعادلة التفاضلية $dy = \sin x \cos^2 y\, dx$ حيث $y \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}, \cos y \neq 0$

الحل

نجعل المعادلة بالشكل $g(y)dy = f(x)dx$

اي :
$$\frac{1}{\cos^2 y}dy = \sin x\, dx$$

$$\sec^2 y dy = \sin x dx$$

باخذ التكامل
$$\Rightarrow \int \sec^2 y dy = \int \sin x dx$$

$\tan y = -\cos x + c$ حيث c ثابت اختياري

مثال – 4-

اوجد حل المعادلة التفاضلية $y' - x\sqrt{y} = 0$ عندما $x = 2, y = 9$

الحل

$$y' - x\sqrt{y} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} - xy^{\frac{1}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = xy^{\frac{1}{2}}$$

$$y^{-\frac{1}{2}}dy = xdx \Rightarrow \int y^{-\frac{1}{2}}dy = \int xdx \Rightarrow 2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + c$$

بالتعويض عن $y = 9$, $x = 2$ ينتج

$$2\sqrt{9} = \frac{1}{2}(2)^2 + c \Rightarrow 6 = 2 + c \Rightarrow \quad c = 4$$

∴ الحل هو

$$2\sqrt{y} = \frac{1}{2}x^2 + 4 \quad \Rightarrow y = (\frac{1}{4}x^2 + 2)^2$$

مثال - 5-

حل المعادلة $\frac{dy}{dx}=e^{2x+y}$ حيث $y=0$ عندما $x=0$

الحل

$$\frac{dy}{dx}=e^{2x}.e^{y} \Rightarrow e^{-y}dy=e^{2x}dx$$

$$-\int e^{-y}(-1)dy=\frac{1}{2}\int e^{2x}(2)dx$$

$$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}+c$$

بالتعويض عن $y = 0$, $x = 0$ ينتج

$$\Rightarrow -e^{0}=\frac{1}{2}e^{0}+c \Rightarrow -1=\frac{1}{2}+c \Rightarrow c=-\frac{3}{2}$$

اذن الحل هو :

$$-e^{-y}=\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{3}{2} \Rightarrow e^{-y}=\frac{1}{2}(3-e^{2x})$$

$$\frac{1}{e^{y}}=\frac{3-e^{2x}}{2}$$

$$e^{y}=\frac{2}{3-e^{2x}}$$

وبأخذ **ln** للطرفين ينتج :

$$\Rightarrow y=\ln\left|\frac{2}{3-e^{2x}}\right|$$

مثال - 6-

جد الحل العام للمعادلة التفاضلية : $(x+1)\frac{dy}{dx}=2y$

الحل

$$\frac{dy}{y}=2\frac{dx}{x+1} \Rightarrow \int\frac{dy}{y}=2\int\frac{dx}{x+1}$$

$$\ln|y|=\ln(x+1)^2+c \Rightarrow$$

$$\ln|y|-\ln(x+1)^2=c$$

$$\ln\frac{|y|}{(x+1)^2}=c \Rightarrow \frac{|y|}{(x+1)^2}=e^{c}$$

حيث $C_1=e^{c}$ ثابت اختياري .

$$|y|=e^{c}(x+1)^2$$

$$\therefore y=\pm C_1(x+1)^2$$

تمارين (2-5)

1 - حل المعادلات التفاضلية الاتية بطريقة فصل المتغيرات :

a) $y' \cos^3 x = \sin x$

b) $\dfrac{dy}{dx} + xy = 3x \;, \qquad x=1, y=2$

c) $\dfrac{dy}{dx} = (x+1)(y-1)$

d) $(y^2 + 4y - 1)y' = x^2 - 2x + 3$

e) $yy' = 4\sqrt{(1+y^2)^3}$

f) $e^x dx - y^3 dy = 0$

g) $y' = 2e^x y^3, \qquad x=0, y=\dfrac{1}{2}$

2 - جد الحل العام للمعادلات التفاضلية الاتية :

a) $xy\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 - y^2$

b) $\sin x \;\cos y \;\dfrac{dy}{dx} + \cos x \;\sin y = 0$

c) $x \cos^2 y \; dx + \tan y \; dy = 0$

d) $\tan^2 y \; dy = \sin^3 x \; dx$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 x \;\cos^2 y$

f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\cos x}{3y^2 + e^y}$

g) $e^{x+2y} + y' = 0$

ثانياً : المعادلة التفاضلية المتجانسة Homogeneous Differential Equation

قد تكون المعادلة التفاضلية ليست قابلة لفصل المتغيرات فيها ولكن قد تكون في الوقت نفسه بصورة معينة نستطيع تحويلها الى معادلة قابلة للفصل وذلك باستخدام بعض التحويلات ومن هذه الصور المعادلة التفاضلية المتجانسة وهي المعادلة التي يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

فمثلاً المعادلة : $(x^4 + y^4)\frac{dy}{dx} = x^3y$ يمكن كتابتها على الصورة الاتية : $\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{y}{x}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^4}$

وذلك بالقسمة على $x^4 \neq 0$

مثال - 1 -

بين اي المعادلات التفاضلية الآتية متجانسة ؟

(1) المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = \frac{2y^2}{2xy - x^2}$

بقسمة البسط والمقام على $x^2 \neq 0$ ينتج

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\frac{y^2}{x^2}}{2\frac{xy}{x^2} - \frac{x^2}{x^2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{y}{x}\right)^2}{2\left(\frac{y}{x}\right) - 1}$$

∴ المعادلة متجانسة

(2) المعادلة التفاضلية $2xyy' - y^2 + 2x^2 = 0$

بقسمة المعادلة على $x^2 \neq 0$ ينتج :

$$\frac{2xy}{x^2}y' - \frac{y^2}{x^2} + 2\frac{x^2}{x^2} = 0$$

$$2\left(\frac{y}{x}\right)y' - \left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2 = 0$$

∴ المعادلة متجانسة

(3) المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = y' = \frac{x^2 - y}{x^3}$

هذه المعادلة غير متجانسة لانه لايمكن كتابتها بالصورة : $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$

طريقة حل المعادلة المتجانسة

اذا كانت المعادلة التفاضلية متجانسة فاننا لغرض حلها نتبع الخطوات الاتية :

1) نكتبها بالصورة $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right)$ ثم نعوض عن $v=\frac{y}{x}$ او $y = vx$ حيث v متغير جديد وهو دالة لـ x

2) نشتق $y = vx$ بالنسبة لـ x فنحصل على $\frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v$

3) بالربط بين **1** و **2** ينتج

$$x\frac{dv}{dx}+v=f(v) \quad \Rightarrow x\frac{dv}{dx}=f(v)-v$$

4) بعد فصل المتغيرات نحصل على $\frac{dv}{f(v)-v}=\frac{dx}{x}$

5) بأخذ تكامل الطرفين $\int\frac{dv}{f(v)-v}=\int\frac{dx}{x}+c$ نحصل على الحل العام بدلالة x , v

6) نعوض بعد ذلك عن $v=\frac{y}{x}$ فنحصل على حل المعادلة بدلالة المتغيرين x, y.

مثال - 1 -

حل المعادلة التفاضلية $y'=\frac{3y^2-x^2}{2xy}$

الحل

بقسمة البسط والمقام بالطرف الايمن على $x^2 \neq 0$ نحصل على :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3(\frac{y}{x})^2-1}{2(\frac{y}{x})} \quad ...(1)$$

اي ان المعادلة متجانسة

بوضع $v=\frac{y}{x}$ تصبح المعادلة (1) بالشكل

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v} \quad ...(2)$$

$$y=vx \Rightarrow \frac{dy}{dx}=x\frac{dv}{dx}+v \quad ...(3)$$

بالتعويض عن (3) في (2) ينتج

$$x\frac{dv}{dx}+v=\frac{3v^2-1}{2v}\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{3v^2-1}{2v}-v$$

بفصل المتغيرات ينتج :

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{v^2-1}{2v}$$

$$\frac{1}{x}dx=\frac{2v}{v^2-1}dv$$

$$\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{2v}{v^2-1}dv\Rightarrow \ln|x|=\ln\left|v^2-1\right|+\ln|c|$$

$$\ln|x|=\ln\left|c(v^2-1)\right|\Rightarrow x=\pm c(v^2-1)$$

$$\because v=\frac{y}{x}\Rightarrow x=\pm c\left[\frac{y^2}{x^2}-1\right]\Rightarrow c=\pm\frac{x^3}{y^2-x^2}$$

مثال - 2 - حل المعادلة التفاضلية $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y+x}{y-x}$

الحل

بقسمة طرفي المعادلة على $(x\neq 0)$ تصبح المعادلة :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{y}{x}+1}{\frac{y}{x}-1}\;....(1)$$

$$\because v=\frac{y}{x}\Rightarrow\frac{dy}{dx}=(v\times 1)+x\frac{dv}{dx}\;....(2)$$

نعوض من (2) في (1) :

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}$$

$$\therefore x\frac{dv}{dx}=\frac{v+1}{v-1}-v\Rightarrow x\frac{dv}{dx}=\frac{2v-v^2+1}{v-1}\Rightarrow\frac{v-1}{2v-v^2+1}dv=\frac{dx}{x}$$

$$\Rightarrow\frac{-1}{2}\int\frac{2-2v}{2v-v^2+1}dv=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\frac{-1}{2}\ln\left|2v-v^2+1\right|=\ln|x|+\ln|c|$$

$$\ln\left|2v-v^2+1\right|^{\frac{-1}{2}}=\ln|cx|\Rightarrow\ln\frac{1}{\sqrt{2v-v^2+1}}=\ln|cx|$$

$$\Rightarrow \sqrt{2v-v^2+1} = \frac{1}{|cx|} =$$

$$\Rightarrow 2v-v^2+1 = \frac{c_1^{\ 2}}{x^2}$$

$$= x^2+2xy-y^2 = k$$

مثال – 3–

حل المعادلة $(3x-y)y' = x+y$

الحل

بالقسمة على $x \neq 0$

$$y' = \frac{x+y}{3x-y} \Rightarrow y' = \frac{1+\frac{y}{x}}{3-\frac{y}{x}}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1+v}{3-v} \quad ...(1)$$

$$\because v = \frac{y}{x} \Rightarrow y = xv \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x\frac{dv}{dx}+v \quad ...(2)$$

نعوض من (1) في (2) ينتج :

$$x\frac{dv}{dx}+v = \frac{1+v}{3-v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+v}{3-v}-v \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{v^2-2v+1}{3-v} \Rightarrow x\frac{dv}{dx} = \frac{(v-1)^2}{3-v}$$

$$\frac{1}{x}dx = \frac{3-v}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \frac{1}{x}dx = \frac{-[(v-1)-2]}{(v-1)^2}dv$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{-1}{(v-1)}dv + \int \frac{2}{(v-1)^2}dv \Rightarrow \ln|x| = -\ln|v-1| - \frac{2}{v-1}+c$$

$$\ln|x| = -\ln\left|\frac{y}{x}-1\right| - \frac{2}{\frac{y}{x}-1}+c$$

$$\ln|y-x| = \frac{-2x}{y-x}+c$$

مثال - 4- جد الحل العام للمعادلة التفاضلية $2x^2\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$

الحل

المعادلة التفاضلية يمكن كتابتها على الصورة الاتية : $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2x^2}K\ \ (1)$

وفي هذه المعادلة يمكن التحقق من ان كلا من البسط والمقام في الطرف الايمن هو دالة متجانسة ومن الدرجة الثانية لذلك نعوض عن : $y=vx$ وبالتالي فان :

$$\frac{dy}{dx}=v+x\frac{dv}{dx}K\ \ (2)$$

نعوض من (2) في (1) ينتج

$$v+x\frac{dv}{dx}=\frac{x^2+x^2v^2}{2x^2}\qquad=\frac{x^2(1+v^2)}{2x^2}$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1+v^2}{2}-v\Rightarrow$$

$$x\frac{dv}{dx}=\frac{1-2v+v^2}{2}$$

$$2x\frac{dv}{dx}=(v-1)^2$$

فبفصل المتغيرات نحصل على الاتي:

$$\frac{dv}{(v-1)^2}=\frac{1}{2}.\frac{dx}{x}$$

وباخذ التكامل للطرفين نجد ان

$$\frac{-1}{v-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+c'$$

حيث c' ثابت اختياري اي ان :

$$v=1-\frac{2}{\ln|x|+2c'}$$

وبالتعويض عن $v=\dfrac{y}{x}$ وبوضع $c=2c'$ في المعادلة الاخيرة نحصل على :

$$y=x-\frac{2x}{\ln|x|+c}$$

تمارين (3-5)

حل كلا من المعادلات التفاضلية الاتية :

1. $y' = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}}$

2. $(y^2 - xy)dx + x^2 dy = 0$

3. $(x + 2y)dx + (2x + 3y)dy = 0$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$

5. $(y^2 - x^2)dx + xydy = 0$

6. $x^2 ydx = (x^3 + y^3)dy$

7. $x(\frac{dy}{dx} - \tan\frac{y}{x}) = y$

6

الفصل السادس

Chapter Six

Space Geometry الهندسة الفضائية

[6-1] تمهيد

[6-2] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

[6-3] الاسقاط العمودي على مستوٍ.

[6-4] المجسمات

المصطلح	الرمز او العلاقة الرياضية
الزاوية الزوجية بين (y) ، (x)	$(x) - \overleftrightarrow{AB} - (y)$
المساحة الجانبية	L - A
المساحة الكلية	T - A
المستوي x	(x)

[6-1] تمهيد.

سبق وان علمنا أن كلاً من المستقيم والمستوي مجموعة غير منتهية من النقط وأن كل نقطتين تعينان مستقيماً واحداً وواحداً فقط وكل ثلاث نقط ليست على استقامة واحدة تعين مستوياً واحداً فقط، وكل اربعة نقط لا تقع في مستو واحد تعين فضاء. اي أن المستقيم يحتوي على نقطتين على اقل تقدير، والمستوي يحتوي على ثلاث نقط على اقل تقدير لا يحتويها مستقيم واحد، والفراغ يحتوي على على اربع نقط على اقل تقدير ليست جميعها في مستو واحد.

كما تعرفنا في الصف الخامس العلمي على علاقات بين المستقيمات والمستويات وبرهنا بعض المبرهنات التي يمكن الافادة منها في مبرهنات جديدة ستتعرف عليها في هذا الفصل.

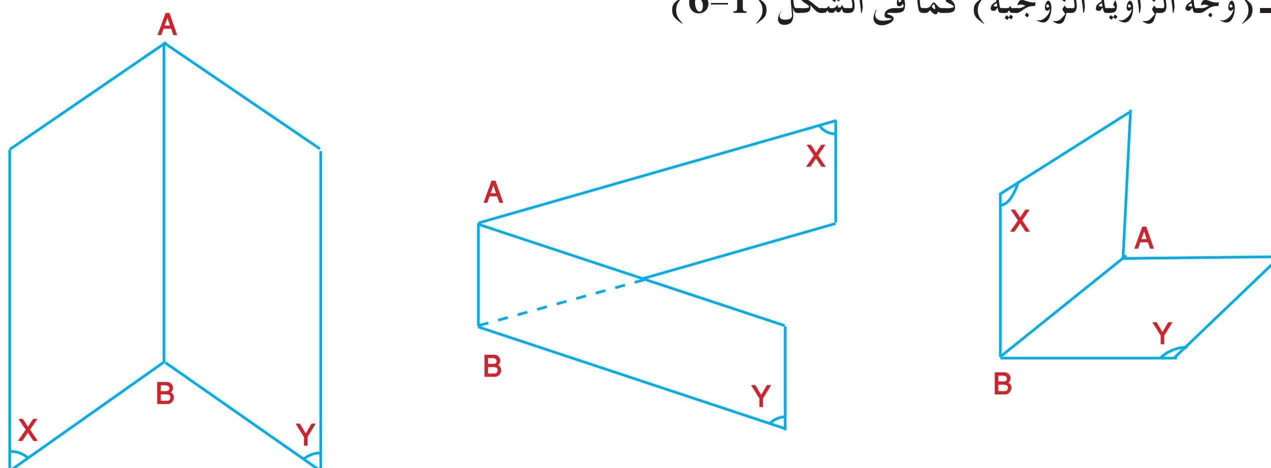
ولكي تتمكن من التواصل معنا وتتعرف على علاقات جديدة بين المستقيمات والمستويات، والمستويات والمستويات وتكتسب مفاهيم جديدة وتبرهن مبرهنات اخرىما عليك الا الرجوع الى مراجعة ما درسته في هذا الموضوع في السنة السابقة.

[6-2] الزاوية الزوجية والمستويات المتعامدة.

تعـــريـف [6-1]

الزاوية الزوجية : اتحاد نصفي مستويين لهما حافة (**Edge**) مشتركة.

تسمى الحافة المشتركة بـ(حرف الزاوية الزوجية **Edge of Dihedral**) ويسمى كل من نصفي المستويين بـ(وجه الزاوية الزوجية) كما في الشكل (**6-1**)



الشكل (**6-1**)

حيث $\overleftrightarrow{AB}$ هو حرف الزاوية الزوجية ، (X) و (Y) هما وجهاها

ويعبر عن الزاوية الزوجية بالتعبير : $(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

وقد يعبر عنها بحرف الزاوية الزوجية ان لم يكن مشتركاً مع زاوية اخرى.

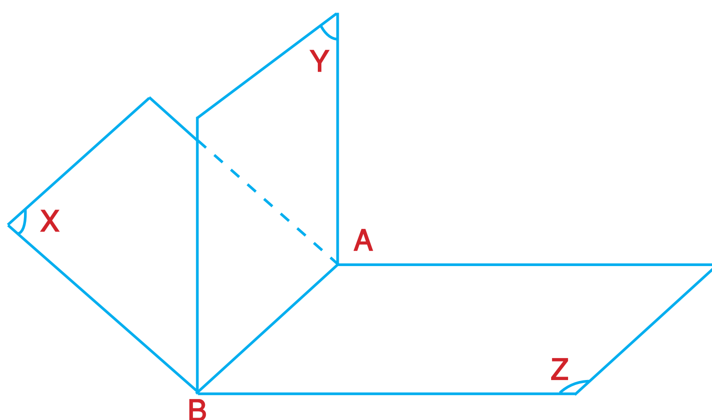
مثلاً :

الزاوية الزوجية

$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Z)$

$(X)-\overleftrightarrow{AB}-(Y)$

$(Y)-\overleftrightarrow{AB}-(Z)$

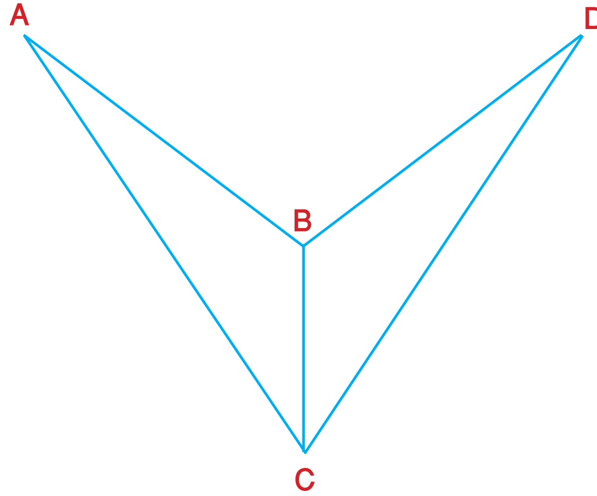


الشكل (**6-2**)

ولا يمكن ان تكتب الزاوية الزوجية بشكل $\overleftrightarrow{AB}$ في هذا المثال لأن الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ مشترك في اكثر من زاوية زوجية.

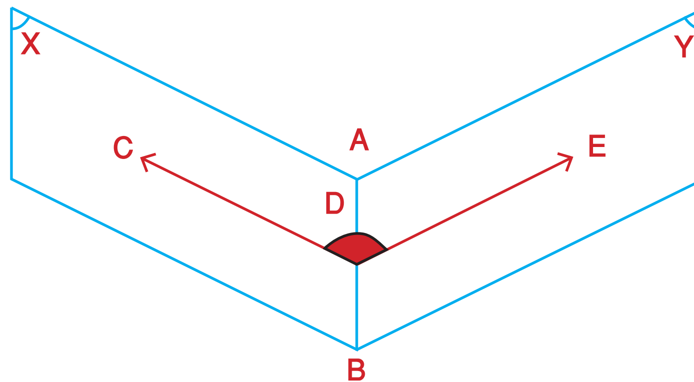
ملاحظة

عندما تكون اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد، نكتب الزاوية الزوجية $A - \overleftrightarrow{BC} - D$ او الزاوية الزوجية بين المستويين (DBC) , (ABC) . كما في الشكل (3-6)



الشكل (3-6)

وتقاس الزاوية الزوجية كالآتي: نأخذ نقطة D على الحافة المشتركة $\overleftrightarrow{AB}$ ونرسم من D العمود $\overrightarrow{DC}$ في (X) والعمود $\overrightarrow{DE}$ في (Y) على الحرف $\overleftrightarrow{AB}$ فيكون قياس الزاوية الزوجية بين المستويين هو قياس الزاوية CDE وتسمى الزاوية CDE الزاوية العائدة للزاوية الزوجية. (كما في الشكل (4-6))



الشكل (4-6)

بعبارة اخرى لدينا الزاوية الزوجية

$$(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$$

ولدينا

$$\overrightarrow{DC} \subset (X), \overrightarrow{DE} \subset (Y)$$

$$\overrightarrow{DC} \perp \overleftrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE} \perp \overleftrightarrow{AB}$$

$\therefore$ CDE $\measuredangle$ هي الزاوية العائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$ او $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y)$

تعريف [6-2]

الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية : هي الزاوية التي ضلعاها عموديان على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في أحد وجهي الزاوية الزوجية
أو هي اتحاد شعاعين عموديين على حرف الزاوية الزوجية من نقطة تنتمي اليه وكل منهما في احد وجهي الزاوية الزوجية

ومن تعريف الزاويتين العائدة والزوجية يمكن استنتاج الآتي

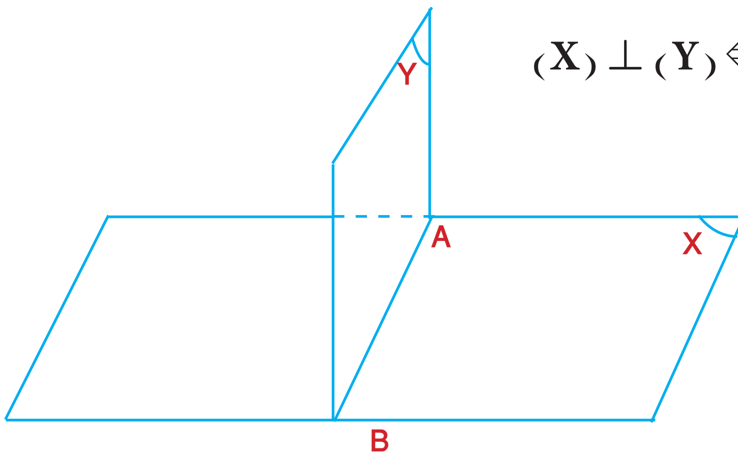
1) قياس زاوية عائدة لزاوية زوجية ثابت

2) قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس.

تعريف [6-3]

اذا كانت الزاوية الزوجية قائمة فان المستويين متعامدان وبالعكس

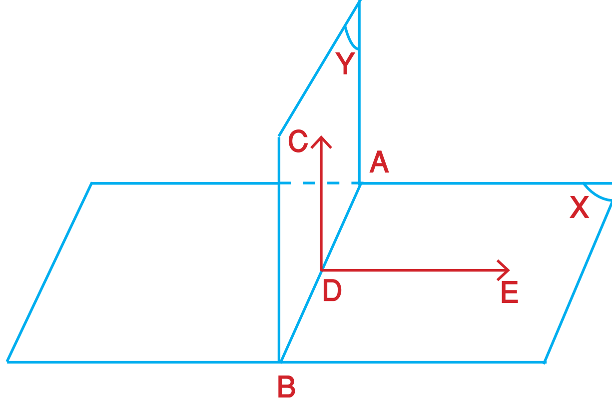
$(X) \perp (Y) \Leftrightarrow$ قياس $(X) - \overleftrightarrow{AB} - (Y) = 90°$



الشكل (6-5)

مبرهنة (7):

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على المستوي الآخر



اي انه:

اذا كان $(X)\perp(Y)$

$(X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB}$

$\overleftrightarrow{CD}\subset(Y),\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$

في D

فان $\overleftrightarrow{CD}\perp(X)$

المعطيات:

$(X)\perp(Y),\quad (X)\cap(Y)=\overleftrightarrow{AB},\quad \overleftrightarrow{CD}\subset(Y),\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$ في نقطة D

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD}\perp(X)$

البرهان:

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{DE}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\overleftrightarrow{CD}\subset(Y),\overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \measuredangle CDE$ عائدة للزاوية الزوجية (Y) – $\overleftrightarrow{AB}$ – (X) (تعريف الزاوية العائدة)

$\therefore m\measuredangle CDE=90^\circ$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore \overleftrightarrow{CD}\perp\overleftrightarrow{DE}$ (اذا كان قياس الزاوية بين مستقيمين 90° فان المستقيمين متعامدان وبالعكس)

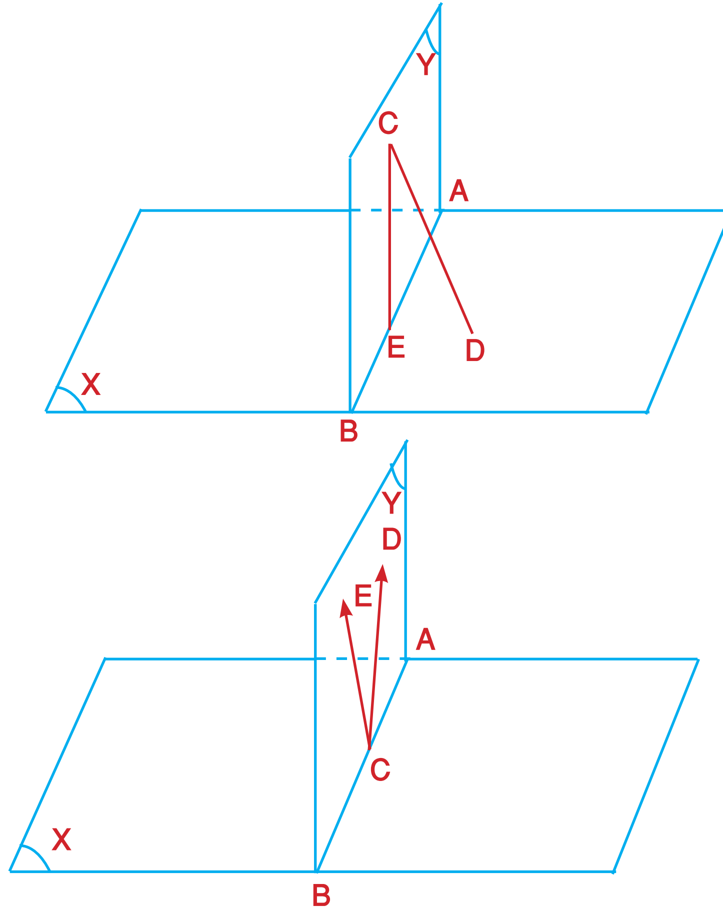
$\therefore \overleftrightarrow{CD}\perp(X)$ (المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

و.هـ.م

نتيجة مبرهنة (7):

اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم من نقطة في احدهما عمودياً على المستوي الآخر يكون محتوى فيه.

اي انه:



$$\overleftrightarrow{CD} \perp (X), C \in (Y), (Y) \perp (X) \Rightarrow \overleftrightarrow{CD} \subset (Y)$$

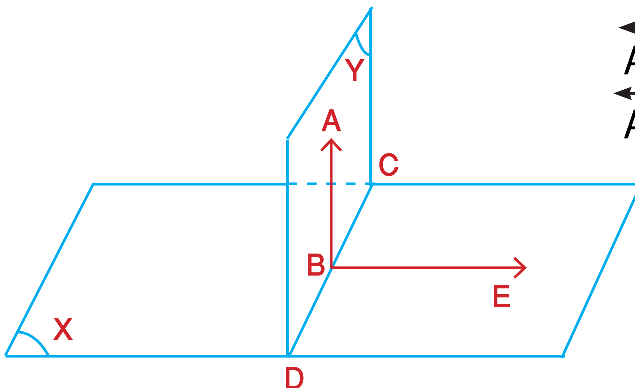
مبرهنة (8):

كل مستوٍ مار بمستقيم عمودي على مستوٍ آخر يكون عمودياً على ذلك المستوي

أو يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر

اي انه:

$$\left.\begin{array}{l} \overleftrightarrow{AB} \perp (X) \\ \overleftrightarrow{AB} \subset (Y) \end{array}\right\} \Rightarrow (Y) \perp (X)$$



المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (X)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$

المطلوب اثباته:

$(Y) \perp (X)$

البرهان:

ليكن $(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$B \in \overleftrightarrow{CD}$ (مستقيم التقاطع يحتوي النقاط المشتركة)

في (X) نرسم $\overleftrightarrow{BE} \perp \overleftrightarrow{CD}$ (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستقيم فيه من نقطة معلومة)

$\because \overleftrightarrow{AB} \perp (X)$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overleftrightarrow{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من أثره)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (Y)$ (معطى)

$\therefore \measuredangle ABE$ عائدة للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$m \measuredangle ABE = 90^\circ$ (لان $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{BE}$)

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $90^\circ = (Y) - \overleftrightarrow{CD} - (X)$ (قياس الزاوية الزوجية يساوي قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

$\therefore (Y) \perp (X)$ (اذا كان قياس الزاوية الزوجية 90° فان المستويين متعامدان وبالعكس)

و . هـ . م

مبرهنة (9):

من مستقيم غير عمودي علىمستوٍ معلوم يوجد مستوٍ وحيد عمودي على المستوي المعلوم.

اي انه:

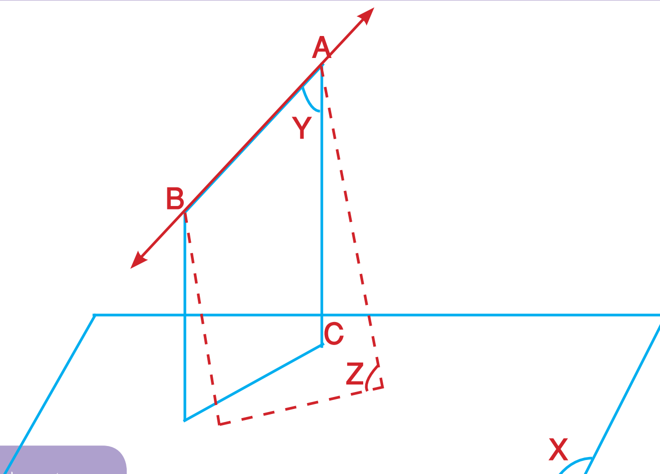
$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)

فيوجد مستوي وحيد يحتوي $\overleftrightarrow{AB}$

وعمودي على (X)

المعطيات:

$\overleftrightarrow{AB}$ غير عمودي على (X)



المطلوب اثباته:

ايجاد مستوٍ وحيد يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

البرهان:

من نقطة (A) نرسم $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (يوجد مستقيم وحيد عمودي على مستوٍ معلوم من نقطة لا تنتمي اليه)

$\because$ $\overleftrightarrow{AC}$, $\overleftrightarrow{AB}$ متقاطعان

$\therefore$ يوجد مستوٍ وحيد مثل (Y) يحويهما (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما)

$\therefore$ $(Y) \perp (X)$ (مبرهنة 8)

ولبرهنة الوحدانية:

ليكن (Z) مستوي اخر يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (X)

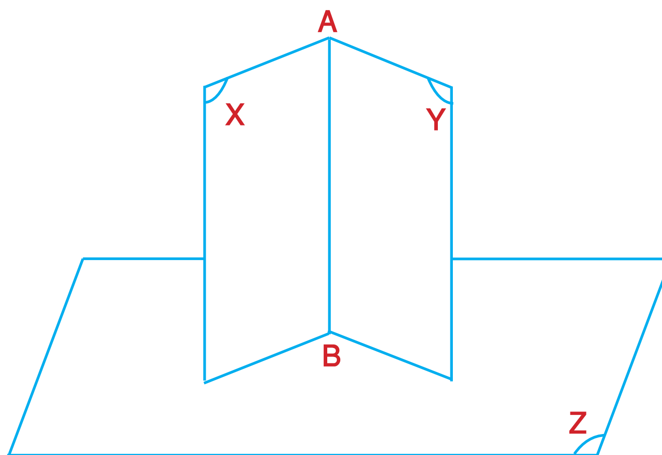
$\because$ $\overleftrightarrow{AC} \perp (X)$ (بالبرهان)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AC} \subset (Z)$ (نتيجة مبرهنة 7)

$\therefore$ $(Y) = (Z)$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوٍ وحيد يحويهما) و.هـ.م

نتيجة مبرهنة (9):

اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث.



المعطيات:

$(X) \cap (Y) = \overleftrightarrow{AB}$

$(X), (Y) \perp (Z)$

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

البرهان:

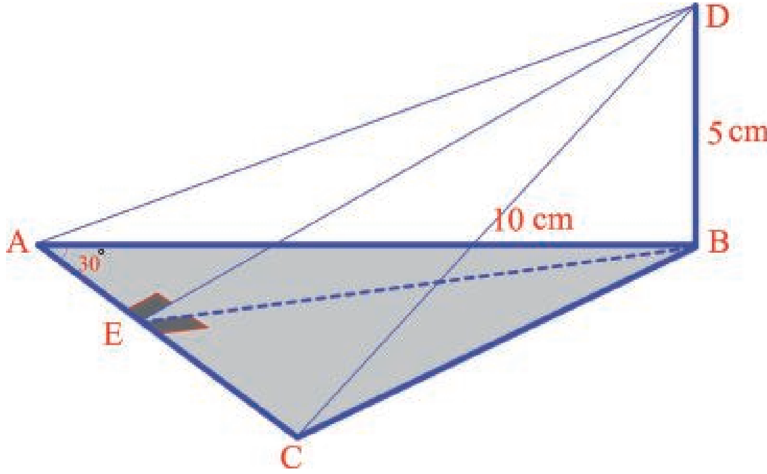
ان لم يكن $\overleftrightarrow{AB}$ عمودياً على (Z)

لما وجد اكثر من مستوي يحوي $\overleftrightarrow{AB}$ وعمودي على (Z) (مبرهنة 9)

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$ و.هـ.م

نشـــاط: توجد طرق اخرى لبرهان هذه المبرهنة ، حاول ذلك.

مثال - 1 -



في $\triangle ABC$

$\overline{BD} \perp (ABC)$ ، $m\measuredangle A = 30°$

$AB = 10\ cm$ ، $BD = 5cm$

جد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

المعطيات:

$\overline{BD} \perp (ABC)$, $m\measuredangle BAC = 30°$ ، $AB = 10\ cm$, $BD = 5\ cm$

المطلوب اثباته:

ايجاد قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B$

البرهان:

في المستوي (ABC) نرسم $\overline{BE} \perp \overline{AC}$ في نقطة E (في المستوي الواحد يوجد مستقيم وحيد عمودي على آخر من نقطة معلومة)

$\because \overline{BD} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore \overline{DE} \perp \overline{AC}$ (مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\Leftarrow \measuredangle DEB$ عائدة للزاوية الزوجية $\overline{AC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

$\overline{DB} \perp \overline{BE}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عموديا على جميع المستقيمات المحتواة في المستوي والمارة من اثره)

$\Leftarrow \triangle DBE$ قائم الزاوية في B

في $\triangle BEA$ القائم الزاوية في E

$$\text{Sin}30° = \frac{BE}{BA} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BE}{10} \Rightarrow BE = 5cm$$

في $\triangle DBE$ القائم الزاوية في B:

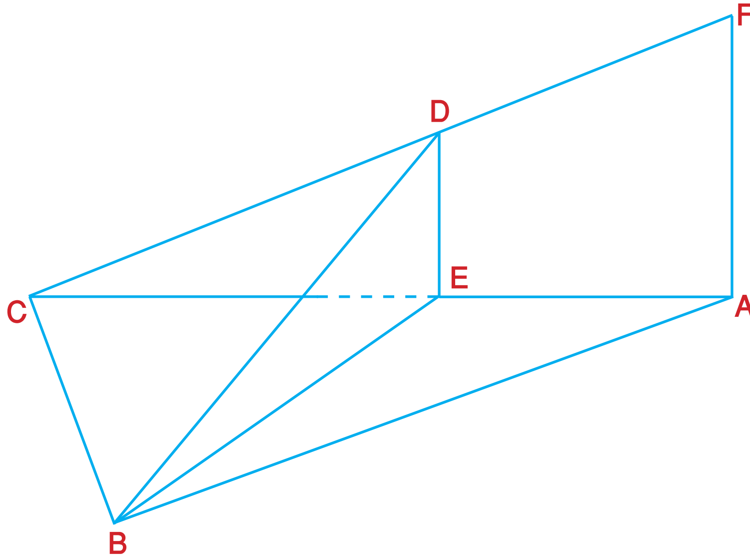
$$\tan(BED) = \frac{5}{5} = 1$$

$\therefore$ قياس $m\measuredangle BED = 45°$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $D - \overline{AC} - B = 45°$ (قياس الزاوية الزوجية هو قياس الزاوية العائدة لها وبالعكس)

و . هـ . م

مثال - 2 -



ليكن ABC مثلثاً وليكن

$\overline{AF} \perp (ABC)$

$\overline{BD} \perp \overline{CF}$

$\overline{BE} \perp \overline{CA}$

برهن ان:

$\overline{BE} \perp (CAF)$

$\overline{ED} \perp \overline{CF}$

المعطيات :

$\overline{AF} \perp (ABC), \overline{BE} \perp \overline{CA}, \overline{BD} \perp \overline{CF}$

المطلوب اثباته:

$\overline{DE} \perp \overline{CF}, \overline{BE} \perp (CAF)$

البرهان:

$\because \overline{AF} \perp (ABC)$ (معطى)

$\therefore (CAF) \perp (ABC)$ (مبرهنة 8 :يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because \overline{BE} \perp \overline{CA}$ (معطى)

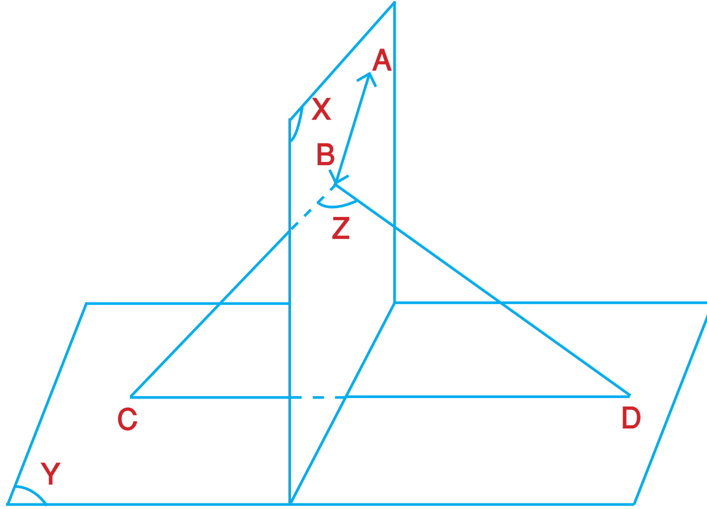
$\therefore \overline{BE} \perp (CAF)$ (مبرهنة 7 : اذا تعامد مستويان فالمستقيم المرسوم في احدهما والعمودي على مستقيم التقاطع يكون عمودياً على الآخر)

$\because \overline{BD} \perp \overline{CF}$ (معطى)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{CF}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

و.هـ.م

مثال - 3-



$(X),(Y)$ مستويان متعامدان

$\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$

$\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD}$ عموديان على $\overleftrightarrow{AB}$

ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

برهن ان:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

المعطيات :

إن $(X) \perp (Y)$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ ، $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ عمودين على $\overleftrightarrow{AB}$ ويقطعان (Y) في C,D على الترتيب

المطلوب اثباته:

$\overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

البرهان :

ليكن (Z) مستوي المستقيمين المتقاطعين $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{BC}$ (لكل مستقيمين متقاطعين يوجد مستوياً وحيداً يحويهما)

بما ان $\overleftrightarrow{BC}, \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AB}$ (معطى)

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp (Z)$

(المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\because \overleftrightarrow{AB} \subset (X)$ (معطى)

$\therefore (Z) \perp (X)$ (يتعامد المستويان اذا احتوى احدهما على مستقيم عمودي على الآخر)

$\because (Y) \perp (X)$ (معطى)

ولما كان $(Z) \cap (Y) = \overleftrightarrow{CD}$ (لانه محتوى في كل منهما)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \perp (X)$

(اذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودياً على مستوٍ ثالث فان مستقيم تقاطعهما يكون عمودياً على المستوي الثالث)

و . هـ . م

تمارين (6-1)

1. برهن ان مستوي الزاوية المستوية العائدة لزاوية زوجية يكون عمودياً على حرفها .

2. برهن انه اذا وازى مستقيم مستوياً وكان عمودياً على مستوٍ آخر فان المستويين متعامدان .

3. برهن ان المستوي العمودي على احد مستويين متوازيين يكون عمودياً على الآخر ايضاً .

4. A,B,C,D اربع نقاط ليست في مستوٍ واحد بحيث $AB = AC$, $E \in \overline{BC}$ فاذا كانت $\measuredangle AED$ عائدة للزاوية الزوجية $A-\overline{BC}-D$ برهن ان $CD = BD$.

5. برهن انه اذا وازى كل من مستقيمين متقاطعين مستوياً معلوماً وكانا عمودين على مستويين متقاطعين فان مستقيم تقاطع المستويين المتقاطعين يكون عمودياً على المستوي المعلوم .

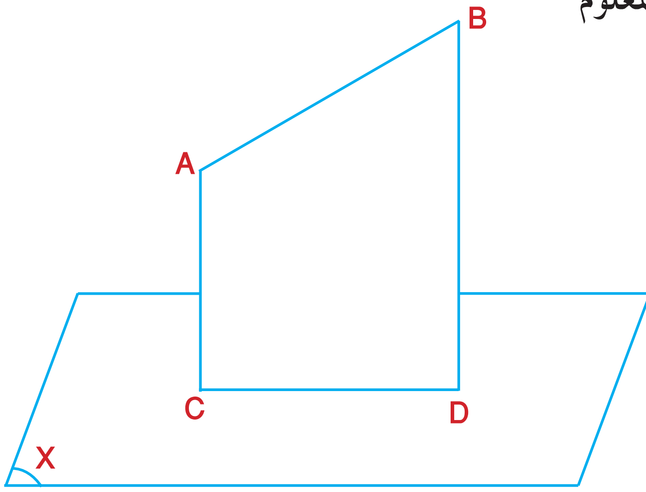
6. دائرة قطرها $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ عمودي على مستويها ، D نقطة تنتمي للدائرة . برهن ان (CDA) عمودي على (CDB) .

(6-3) الاسقاط العمودي على مستوٍ
The Orthogonal Projection on a Plane

1) **مسقط نقطة على مستوٍ:** هو أثر العمود المرسوم من تلك النقطة على المستوي.

2) **مسقط مجموعة نقط على مستوي:** لتكن **L** مجموعة من نقاط في الفراغ فان مسقطها هو مجموعة كل اثار الاعمدة المرسومة من نقاطه على المستوي .

3) **مسقط قطعة مستقيم غير عمودية على مستوٍ معلوم:** هو قطعة المستقيم المحددة بأثري العمودين المرسومين من نهايتي القطعة على المستوي المعلوم



ليكن $\overline{AB}$ غير عمودي على (X) وليكن

$\overline{AC} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط A على (X) هو C

$\overline{BD} \perp (X) \Leftarrow$ مسقط B على (X) هو D

$\therefore$ مسقط $\overline{AB}$ على (X) هو $\overline{CD}$

ملاحظة

اذا كان $\overline{AB} \parallel (X)$

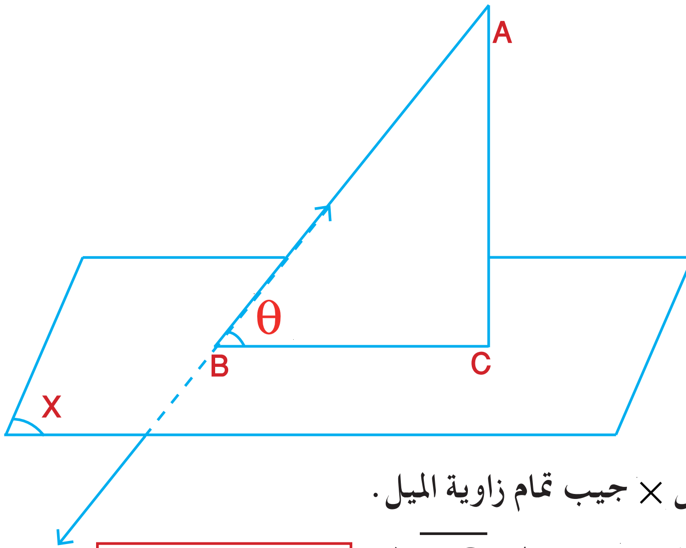
فان $AB = CD$

4) **المستقيم المائل (Inclined Line) على مستوٍ:** هو المستقيم غير العمودي على المستوي وقاطع له

5) **زاوية الميل (Angle of Inclination):** هي الزاوية المحددة بالمائل ومسقطه على المستوي.

ليكن $\overleftrightarrow{AB}$ مائلاً على (X) في B

وليكن $\overline{AC} \perp (X)$ في C



$\therefore$ C مسقط A على (X) حيث $A \notin (X)$

كذلك B مسقط نفسها حيث $B \in (X)$

$\Leftarrow \overline{BC}$ مسقط $\overline{AB}$ على (X)

اي ان $0 < \theta < 90°$

$\theta \in (0, 90°)$

6) طول المسقط

طول مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ = طول المائل × جيب تمام زاوية الميل .

فعندما تكون $\overline{AB}$ مائلاً على (X) وزاوية ميله θ ومسقطه $\overline{BC}$ فان $BC = AB\cos\theta$

7) مسقط مستوي مائل (Inclined Plane) على (X)

زاوية ميل مستوٍ على مستوٍ معلوم هو قياس الزاوية المستوية العائدة للزاوية الزوجية بينهما

مساحة مسقط منطقة مائلة على مستوٍ معلوم = مساحة المنطقة المائلة × جيب تمام زاوية الميل

لتكن A مساحة المنطقة المائلة ، A′ مساحة المسقط ، θ قياس زاوية الميل $A' = A.\cos\theta$

مثال – 4 –

اذا وازى احد ضلعي زاوية قائمة مستوياً معلوماً فان مسقطي ضلعيها على المستوي متعامدان.

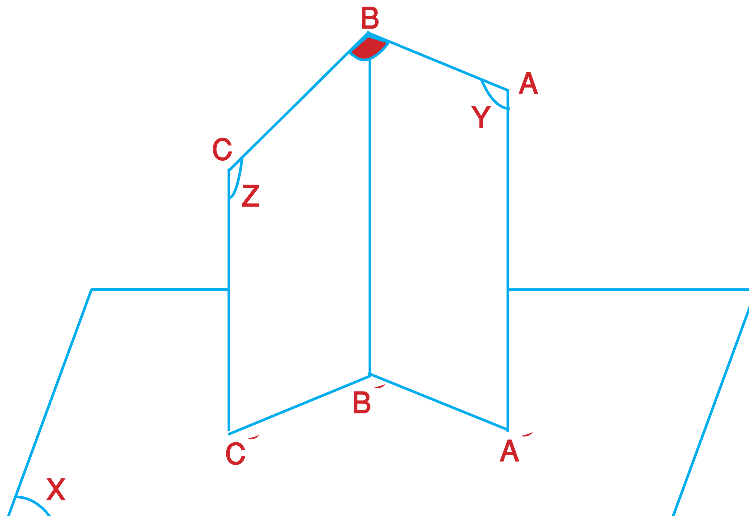
المعطيات:

ABC زاوية قائمة في B

$\overline{AB} // (X)$ ،

$\overline{A'B'}$ هو مسقط $\overline{AB}$ على (X)

$\overline{B'C'}$ هو مسقط $\overline{BC}$ على (X)



المطلوب اثباته :

$\overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$

البرهان:

$\overline{A'B'}$ مسقط $\overline{AB}$ } معطى
$\overline{B'C'}$ مسقط $\overline{BC}$

$\Leftarrow (X) \perp \overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}$ (مسقط قطعة مستقيم على مستوٍ معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة).

$\overline{AA'} // \overline{BB'}$ ، $\overline{BB'} // \overline{CC'}$ (المستقيمان العموديان على مستوٍ واحد متوازيان)

بالمستقيمين المتوازيين $\overline{BB'}$ ، $\overline{AA'}$ نعين (Y) } (لكل مستقيمين متوازيين يوجد مستوٍ وحيد يحتويهما)
بالمستقيمين المتوازيين $\overline{CC'}$ ، $\overline{BB'}$ نعين (Z)

لكن $\overline{AB} // (X)$ (معطى)

$(Y) \cap (X) = \overline{A'B'}$ (يتقاطع المستويان بخط مستقيم)

$\Leftarrow \overline{AB} // \overline{A'B'}$ (اذا وازى مستقيم مستوياً معلوماً فانه يوازي جميع المستقيمات الناتجة من تقاطع هذا المستوي والمستويات التي تحوي المستقيم)

كذلك $\overline{BB'} \perp \overline{A'B'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

$\overline{AB} \perp \overline{BB'}$ (في المستوي الواحد : المستقيم العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

لكن $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ (لان $\measuredangle ABC = 90°$ M معطى)

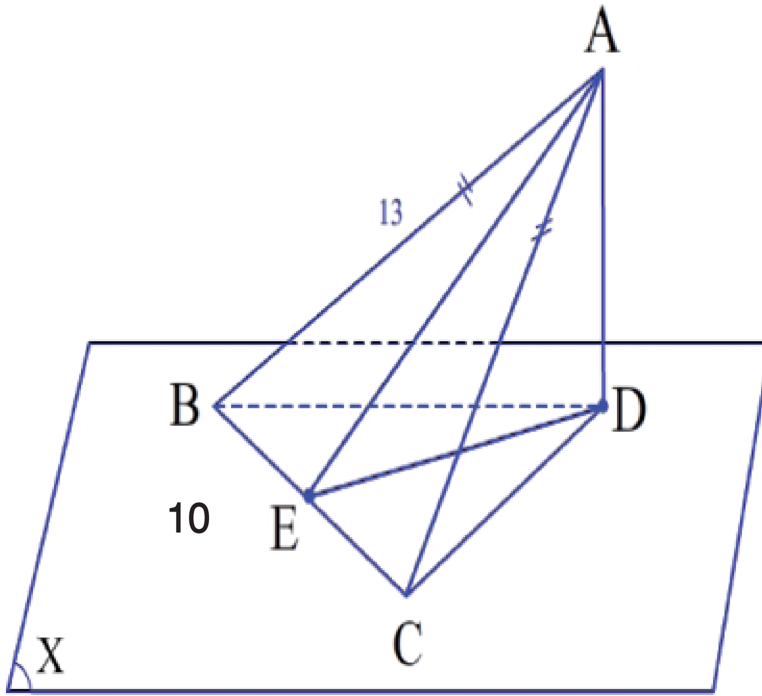
$\overline{AB} \perp (Z)$ (المستقيم العمودي على مستقيمن متقاطعين من نقطة تقاطعهما يكون عمودياً على مستويهما)

$\Leftarrow \overline{A'B'} \perp (Z)$ (المستوي العمودي على احد مستقيمين متوازيين يكون عمودياً على الآخر)

$\therefore \overline{A'B'} \perp \overline{B'C'}$ (المستقيم العمودي على مستوي يكون عمودياً على جميع المستقيمات المرسومة من أثره ضمن ذلك المستوي)

و. هـ. م

مثال - 5-



ABC مثلث ، $\overline{BC} \subset (X)$

والزاوية الزوجية بين مستوي المثلث

ABC والمستوي (X)

قياسها $60°$ فاذا كان

$AB = AC = 13cm, BC = 10cm$

جد مسقط المثلث (ABC) على (X)

ثم جد مساحة مسقط $\triangle ABC$ على (X)

المعطيات :

$\triangle ABC, \overline{BC} \subset (X)$

قياس $(ABC) - \overline{BC} - (X) = 60°$

$AB = AC = 13, BC = 10$

المطلوب اثباته:

ايجاد مسقط $\triangle ABC$ على (X) وايجاد مساحة مسقط $\triangle$ **ABC** على (X)

البرهان :

نرسم $\overline{AD} \perp (X)$ في D (يمكن رسم عمود على مستوي من نقطة معلومة)

$\therefore$ $\overline{CD}$ مسقط $\overline{AC}$
$\overline{BD}$ مسقط $\overline{AB}$
$\overline{BC}$مسقط نفسه على (X)

(مسقط قطعة مستقيم على مستو معلوم هو القطعة المحددة بأثري العمودين المرسومين على المستوي من طرفي القطعة المستقيمة)

$\therefore \triangle BCD$ مسقط $\triangle$ ABC على (X)

في (ABC) نرسم $\overline{AE} \perp \overline{BC}$ في E (في المستوي الواحد يمكن رسم مستقيم عمود على آخر من نقطة معلومة)

وبما أن $AC = AB$ (معطى)

$\therefore EC = BE = 5cm$ (العمود النازل من راس مثلث متساوي الساقين على القاعدة ينصفها)

$\therefore \overline{ED} \perp \overline{BC}$ (نتيجة مبرهنة الاعمدة الثلاثة)

$\therefore \measuredangle DEA$ عائدة للزوجية $\overline{BC}$ (تعريف الزاوية العائدة)

لكن قياس الزاوية الزوجية $\overline{BC} = 60°$ (معطى)

في $\triangle AEB$ القائم في E :

$$AE = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12cm$$

في $\triangle AED$ القائم في D

$$\cos 60° = \frac{ED}{AE} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{ED}{12} \Rightarrow ED = 6cm$$

$$BCD \text{ مساحة المثلث } = \frac{1}{2} \times 10 \times 6 = 30cm^2$$

و . هـ . م

ملاحظة

لو طلب مساحة المسقط فقط فيمكن ايجاده كالآتي:

مساحة BCD = مساحة $ABC \times \cos 60°$

$$= \frac{1}{2} \times (12 \times 10 \times \frac{1}{2}) = 30cm^2$$

و . هـ . م

تمارين (2-6)

1. برهن أن طول قطعة المستقيم الموازي لمستو معلوم يساوي طول مسقطه على المستوي المعلوم ويوازيه.

2. برهن أنه إذا قطع مستويان متوازيان بمستقيم فان ميله على أحدهما يساوي ميله على الآخر .

3. برهن على أن للمستقيمات المتوازية المائلة على مستو الميل نفسه

4. برهن على أنه إذا رسم مائلان مختلفان في الطول من نقطة لا تنتمي الى مستو معلوم فان أطولهما تكون زاوية ميله على المستوي أصغر من زاوية ميل الآخر عليه.

5. برهن على أنه إذا رسم مائلان من نقطة ما الى مستو فأصغرهما ميلاً هو الاطول .

6. برهن على أن زاوية الميل بين المستقيم ومسقطه على مستوٍ اصغر من الزاوية المحصورة بين المستقيم نفسه واي مستقيم آخر مرسوم من موقعه ضمن ذلك المستوي.

[6-4] المجسمات (Solid)

سبق للطالب دراسة المجسمات في المرحلة المتوسطة ونلخص فيما يلي قوانين الحجوم والمساحات الجانبية والكلية لبعض المجسمات علماً ان الحديث عن حجم مجسم نقصد به حجم المنطقة في الفراغ (الفضاء) الواقعة داخل المجسم.

1) الموشور (المنشور) القائم (Right Prism)

الرسم Diagram	
الحجم Volume	مساحة القاعدة × الارتفاع
المساحة الجانبية Lateral Area	مجموع مساحات الاوجه الجانبية = محيط القاعدة × الارتفاع
المساحة الكلية Total Area	المساحة الجانبية + مساحة قاعدتين

2) متوازي السطوح المستطيلة (متوازي المستطيلات) (ParallelPiped)

	الرسم Diagram
Z Y X	
$V = x\ y\ z$	Volume الحجم
$L.A = 2(x+y)z$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 2(x+y)z+2xy$	Total Area المساحة الكلية

3) المكعب (Cube)

	الرسم Diagram
X X X	
$V = x^3$	Volume الحجم
$L.A = 4x^2$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 6x^2$	Total Area المساحة الكلية

4) الاسطوانة الدائرية القائمة (Right Circular Cylinder)

	الرسم Diagram
$V = \pi r^2 h$	Volume الحجم
$L.A = 2\pi rh$	Lateral Area المساحة الجانبية
$T.A = 2\pi rh + 2\pi r^2$	Total Area المساحة الكلية

5) الهرم (Pyramid)

	الرسم Diagram
$V = \frac{1}{3} b h$ b : مساحة القاعدة h : الارتفاع	Volume الحجم
$L.A = \frac{1}{2}$ (محيط القاعدة) × طول الارتفاع الجانبي	Lateral Area المساحة الجانبية
T.A = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة	Total Area المساحة الكلية

6) المخروط الدائري القائم (Right Circular Cone)

الرسم **Diagram**	h, r, ℓ
الحجم **Volume**	$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$
Lateral Area المساحة الجانبية	$L.A = \pi r \ell$
Total Area المساحة الكلية	$T.A = \pi r \ell + \pi r^2$

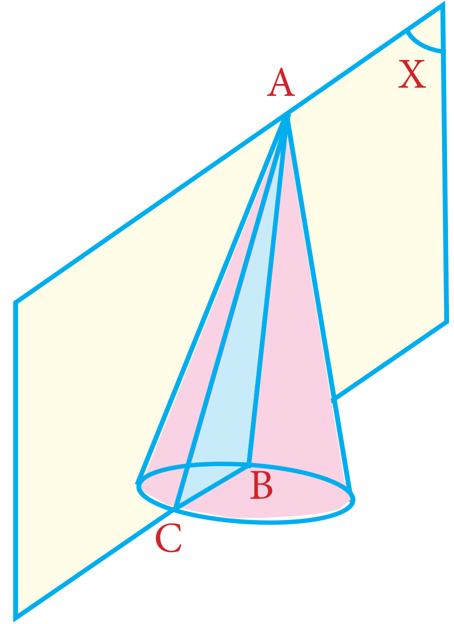
7) الكرة (Sphere)

الرسم **Diagram**	r
الحجم **Volume**	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$
مساحة سطح الكرة	مساحة سطح الكرة = مساحة 4 دوائر عظيمة = $4\pi r^2$ $S = 4\pi r^2$

ملاحظة

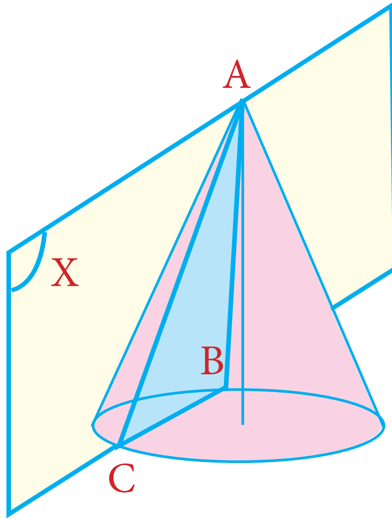
1) ذو الوجوه الاربعة المنتظم: هرم ثلاثي قائم منتظم اوجهه الاربعة مثلثات متساوية الاضلاع ومتطابقة

2) اذا قطع المخروط الدائري بمستوي مار من احد مولداته فان المقطع مثلث ويكون المثلث في المخروط الدائري القائم متساوي الساقين



مخروط دائري مائل

$AC \neq AB \Leftarrow$



مخروط دائري قائم

$AC = AB \Leftarrow$

تمارين (3-6)

1. اذا كانت المساحة الكلية لمتوازي المستطيلات = $724cm^2$ ومساحة قاعدته = $132cm^2$ ومساحة احد اوجهه الجانبية = $110cm^2$ جد حجمه.

2. اسطوانة دائرية قائمة مساحتها الجانبية $400\pi cm^2$ وحجمها $2000\pi cm^3$ اوجد ارتفاعها ونصف قطر قاعدتها.

3. برهن على ان حجم ذي الوجوه الاربعة المنتظم والذي طول حرفه = ℓ هو $\frac{\sqrt{2}\,\ell^3}{12}$ وحدة مكعبة.

4. مخروط دائري قائم مرّ برأسه مستوٍ فقطع قاعدته بقطعة مستقيم تبعد عن مركز القاعدة بمقدار **8cm** فاذا كانت مساحة المقطع = $102cm^2$ وارتفاع المخروط = **15cm** احسب:

1) حجمه 2) مساحته الجانبية 3) مساحته الكلية

5. اذا علمت انه يمكن رسم كرة خارج ذي الوجوه الاربعة المنتظم.
برهن ان نصف قطر الكرة = $\frac{3}{4}$ الارتفاع.

تمارين عامة

1. جد قيمة $x, y \in R$ والتي تحقق $\frac{y}{1+i}=\frac{x^2+4}{x+2i}$.

2. جد ناتج: $\left(3\omega^{9n}+\frac{5}{\omega^5}+\frac{4}{\omega^4}\right)^6$. $n \in z$

3. اذا كان $z=\frac{1-\sqrt{3}i}{1+\sqrt{-3}}$ عدد مركباً جد باستخدام مبرهنة ديموافر $z^{\frac{1}{2}}$.

4. قطع ناقص مركزه نقطة الاصل وقطع زائد نقطة تقاطع محورية نقطة الاصل . كل منهما يمر ببؤرة الاخر فاذا كانت $9x^2+25y^2=225$ معادلة القطع الناقص فجد .

أ) مساحة منطقة القطع الناقص.

ب) محيط القطع الناقص.

جـ) معادلة القطع الزائد ثم ارسمه.

د) الاختلاف المركزي لكل منهما .

5. جد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه تنتميان لمحور السينات ومركزه نقطة الاصل ومساحة منطقته 7π وحدة مربعة ومحيطه يساوي 10π وحدة .

6. جد $\frac{dy}{dx}$ لكل مما يأتي:

a) $x^3y^2-2y=5x+3$

b) $y=\sin 4x \ \tan 2x$

c) $y=e^{x^2} \ \ln|2x|$

d) $y=\tan(\cos x)$

e) $y=x^2\ln|x|$

f) $y=\ln(\tan^2 x)$

g) $y=\frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$

h) $y=\cos(e^{\pi x})$

7. استخدم مبرهنة رول ثم مبرهنة القيمة المتوسطة لايجاد قيم C للدالة $f(x)=x^4-2x^2, x\in[-2,2]$.

8. $f(x)=ax^2-4x+5$ دالة تحقق شروط مبرهنة رول على الفترة $[-1,b]$, فاذا كانت $c=2$ تنتمي للفترة $(-1,b)$ فجد قيمة $a,b\in R$.

9. متوازي سطوح مستطيلة قاعدته مربعة وارتفاعه ثلاثة امثال طول قاعدته ، جد الحجم التقريبي له عندما يكون طول قاعدته $2.97cm$.

10. مخروط دائري قائم حجمه $210\pi cm^3$ جد القيمة التقريبية لنصف قطر قاعدته اذا كان ارتفاعه $10cm$.

11. اذا كانت $f(x)=\sqrt[5]{31x+1}$ جد باستخدام نتيجة مبرهنة القيمة المتوسطة القيمة التقريبية الى $f(1.01)$.

12. باستخدام معلوماتك في التفاضل ارسم المنحني البياني للدالة $yx^2=1$.

13. جد تكاملات كلاً مما يأتي :

a) $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$

b) $\int(\sin 2x-1)(\cos^2 2x+2)dx$

c) $\int\frac{\ln|x|}{x}dx$

d) $\int\frac{2\sin\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^2}}dx$

e) $\int\cot x\ \csc^3 x dx$

f) $\int\sqrt[3]{3x^3-5x^5}dx$

g) $\int\frac{1}{x^2-14x+49}dx$

h) $\int\sec^2 3x\ e^{\tan 3x}dx$

14. حل المعادلة التفاضلية الآتية $y'=\frac{\cos^2 y}{x}$ ، $y=\frac{\pi}{4}, x=1$.

15. حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx}=-2x\tan y$ حيث ان $x=0$ عندما $y=\frac{\pi}{2}$.

16. حل المعادلة التفاضلية $x\ y'=y-x$ حيث ان $x=1, y=1$.

17. حل المعادلة التفاضلية الاتية $(x^2+3y^2)dx-2xy\ dy=0$.